



# Généricité au sens probabiliste dans les difféomorphismes du cercle

Michele Triestino

**Résumé.** Quel est le type de dynamique que l'on observe généralement sur le cercle? Cela dépend en quelque sorte de l'interprétation que l'on donne à « généralement ». Nous avons une très bonne compréhension dans le cadre topologique (au sens de Baire), mais *quid* du cadre probabiliste? Le problème majeur provient du fait que sur un groupe de dimension infinie, il n'y a pas d'analogue à la mesure de Lebesgue – dans un sens strict. Cependant, des analogues existent, et ils sont en outre naturels et de construction facile : les mesures de Malliavin-Shavgulidze en donnent un exemple, et elles sont les protagonistes de cet ouvrage. Les premiers résultats montrent qu'il n'y a pas de discordance entre les aspects génériques de la dynamique dans les deux contextes topologiques et probabilistes : c'est le royaume de l'hyperbolicité! En revanche, les problèmes les plus intrigants demeurent sans réponse...

Ce travail, prenant source dans la thèse de doctorat de l'auteur, est l'occasion de parcourir des résultats intéressants dans deux sujets mathématiques qui devraient interagir plus fréquemment : les processus stochastiques et la dynamique en dimension un.

Après un aperçu panoramique, les trois chapitres suivants constituent un sommaire pédagogique de résultats classiques en théorie de l'intégration sur les groupes topologiques, mouvement brownien et difféomorphismes du

cercle.

Puis, nous présentons la construction des mesures de Malliavin-Shavgulidze sur les espaces des difféomorphismes  $C^1$  de l'intervalle et du cercle, en discutant leur propriété remarquable de quasi-invariance.

Le dernier chapitre est dévoué à l'étude des aspects dynamiques du difféomorphisme aléatoire de Malliavin-Shavgulidze.

**Abstract.** What kind of dynamics do we observe in general on the circle? It depends somehow on the interpretation of “in general”. Everything is quite well understood in the topological (Baire) setting, but what about the probabilistic sense? The main problem is that on an infinite dimensional group there is no analogue of the Lebesgue measure, in a strict sense. There are however some analogues, quite natural and easy to define : the Malliavin-Shavgulidze measures provide an example and constitute the main character of this text. The first results show that there is no actual disagreement of general features of the dynamics in the topological and probabilistic frames : it is the realm of hyperbolicity! The most interesting questions remain however unanswered...

This work, coming out from the author's Ph.D. thesis, constitutes an opportunity to review interesting results in mathematical topics that could interact more often : stochastic processes and one-dimensional dynamics.

After an introductory overview, the following three chapters are a pedagogical summary of classical results about measure theory on topological groups, Brownian Motion, theory of circle diffeomorphisms.

Then we present the construction of the Malliavin-Shavgulidze measures on the space of interval/circle  $C^1$  diffeomorphisms and discuss their key property of quasi-invariance.

The last chapter is devoted to the study of dynamical features of a random Malliavin-Shavgulidze diffeomorphism.