

# Grupos de Lie via Exemplos

## Topologia, Geometria e Física

LLOHANN D. SPERANÇA<sup>1</sup>

17 de março de 2016

<sup>1</sup>[lsperanca@ufpr.br](mailto:lsperanca@ufpr.br)



# Sumário

<b>1</b>	<b>O que é simetria?</b>	<b>5</b>
1.1	O conceito matemático de simetria . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Simetrias em Álgebra Linear</b>	<b>15</b>
2.0.1	O Produto Interno em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	17
2.0.2	Os grupos $O(n)$ . . . . .	19
2.0.3	Outros Grupos Matricias . . . . .	20
2.1	$SO(n)$ , para $n = 2$ . . . . .	21
2.2	Simetrias Contínuas: Fluxos . . . . .	24
2.2.1	Rotações . . . . .	26
2.2.2	A definição formal de Fluxos . . . . .	28
2.3	A Álgebra Infinitesimal de $SO(3)$ . . . . .	29
2.3.1	Geradores Infinitesimais . . . . .	29
2.3.2	O fluxo de $A$ . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Topologia de <math>SO(3)</math></b>	<b>35</b>
3.1	A Álgebra Quaterniônica . . . . .	35
3.1.1	O Grupo de Quatérnions Unitários . . . . .	37
3.1.2	$\mathbb{S}^3$ e $SO(3)$ . . . . .	38
3.2	Propriedades da aplicação $\pi$ . . . . .	39
3.2.1	Sobrejetividade . . . . .	39
3.3	Geodésicas em $\mathbb{S}^3$ e $SO(3)$ . . . . .	42
3.4	Vizualizando $\mathbb{S}^3$ e $SO(3)$ . . . . .	43
3.4.1	Vizualizando $SO(3)$ . . . . .	44
<b>4</b>	<b>A fibração de Hopf</b>	<b>47</b>
4.0.1	Parametrizando $SO(3)$ sobre $S^2$ . . . . .	48



# Prefácio

A natureza traz junto consigo uma riqueza extraordinária de fenômenos, os quais muitas vezes possuem alto grau de simetria. Por exemplo, todo objeto baseado em poliedros regulares possuem eixos e ângulos de simetria (colméias, pétalas, cristais, átomos, ...); ou podem aparecer conjuntos infinitos dessas: uma esfera é exatamente igual independente da direção e ângulo que você a gira. Mas um dos melhores exemplos rege o nosso dia-a-dia: as leis da física são invariantes por referencial, ângulo e posição.

Tais simetrias ganharam atenção por si só e suas aplicações permeiam a matemática moderna. Esse manuscrito é dedicado a estudar uma classe especial de simetrias através de sua estrutura algebro-geométrica. Como toda classe de simetria, essa é representada por um grupo, o  $SO(3)$ . Aqui exploramos a riqueza da geometria herdada por esse grupo, com o objeto de familiarizar o aluno a conceitos habituais em geometria moderna, porém de caráter muito profundos (como variedades, recobrimentos e essencialidade de aplicações).

O manuscrito atual encontra-se em forma indesejavelmente preliminar, porém será completado ao longo do tempo.



## Agradecimentos

O mini-curso foi inspirado pelo livro homônimo do Prof. Alcebiades Rigas, a quem o autor deve seus principais agradecimentos. O autor também agradece Aline Zanardini por sua magnífica contribuição, digna

Também agradece à organização do IV Colóquio de Matemática da Região Sul pela oportunidade do minicurso.





## Capítulo 1

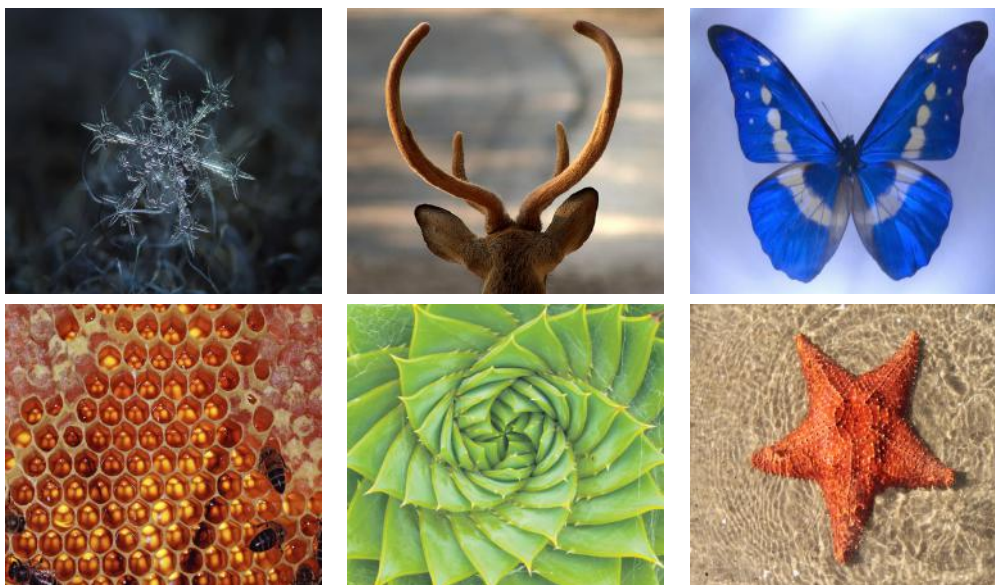
# O que é simetria?

por A. Zanardini

*“Symmetry, as wide or as narrow as you may define its meaning, is one idea by which man through the ages has tried to comprehend and create order, beauty, and perfection.”*

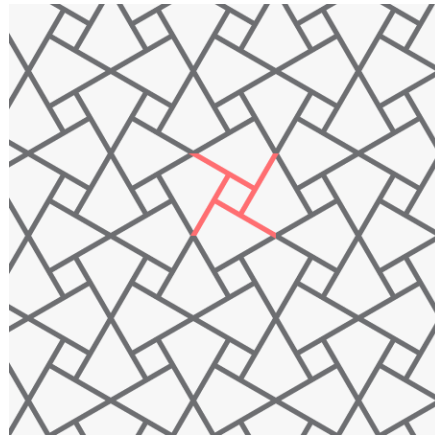
– H. Weyl, *Symmetry, Princeton: Princeton University Press, 1952, p.5.*

Se perguntados, certamente podemos responder com alguma facilidade se um dado objeto é simétrico ou não. Por quê? O que é simetria, ou, o que significa algo ser simétrico? Tem sentido dizer que um determinado objeto é mais simétrico que outro? Como? Uma ideia geral do que se trata simetria parece permear nossas experiências diárias e, surpreendentemente, ser inerente à natureza:



Assim como a exposição de Weyl, em seu famoso livro ‘*Symmetry*’[4], a nossa





A figura representa um ladrilhamento do plano definido pelo padrão destacado em vermelho e podemos pensar neste padrão como um conjunto de segmentos de reta no plano. Agora, como obtemos o restante da figura? É possível *transformar* este conjunto de segmentos de modo a obter “a mesma” configuração? Como? E, mais importante, por quê?

Em resumo, a ideia geral é a que segue: começamos com o inanimado, o conjunto de segmentos, e em nossas questões encontramos “movimento”; em contrapartida, o movimento deve deixar o padrão *invariante*, “parado”.

Assim, somos levados a um princípio mais sofisticado, um que, nas palavras de Weyl<sup>1</sup> [4], tem guiado a Matemática moderna e finalmente podemos generalizar a noção de simetria para contextos não-geométricos. As simetrias de uma estrutura, isto é, qualquer conjunto de elementos com uma (ou mais) relação definida entre eles, consistem naquelas transformações do conjunto sobre si mesmo que deixam a relação inalterada.

Dada uma *transformação*, torna-se natural então nos perguntarmos quais são os invariantes, o que permanece inalterado? Como veremos, em linguagem Matemática, nossa inicial vaga noção de harmonia é então traduzida como *invariância por um grupo de automorfismos*

## 1.1 O conceito matemático de simetria

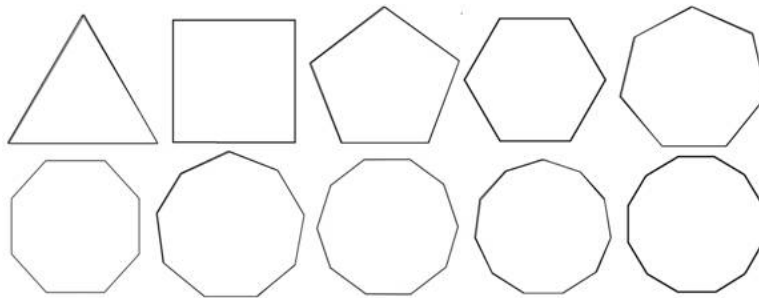
Motivados pelos parágrafos anteriores, nosso objetivo agora é apresentar o conceito matemático de simetria. Note que, admiravelmente, em ambas as entradas do verbete no início deste capítulo encontramos a palavra *correspondência*. Em Matemática, o termo mais próximo talvez seja *bijeção*.

<sup>1</sup>“What we learn...and what has ideed become a guiding principle in modern Mathematics is this lesson: *Whenever you have to do with a structure-endowed entity, try to determine its group of automorphisms [symmetries], the group of those element-wise transformations which leave all structural relations undisturbed. You can expect to gain a deep insight into the constitution of it in this way.*”(p.144)

Dado um conjunto  $X$ , dizemos que uma função  $\phi$  é uma **simetria** de  $X$  se  $\phi$  é uma bijeção de  $X$ , isto é,  $\phi : X \rightarrow X$  é inversível. O conjunto das simetrias de  $X$  será denotado por  $Bij(X)$ <sup>2</sup>.

A pergunta que propomos é: Tal definição nos permite seguir a lição de Weyl? Flores, cristais, moléculas, leis da física, equações polinomiais e tantos outros objetos matemáticos não são apenas conjuntos; seus elementos partilham de relações. Estamos interessados no que anteriormente chamamos de *estrutura*.

O próximo passo então é introduzir o conceito de *grupo*. Para isso, consideraremos polígonos regulares no plano

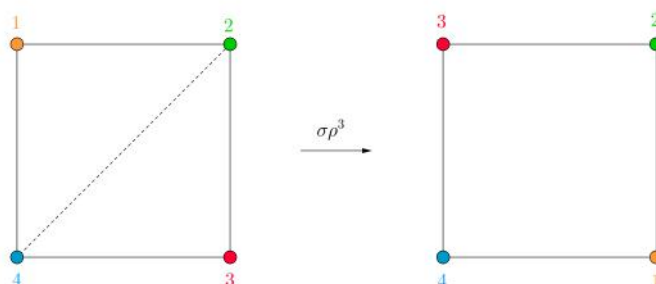
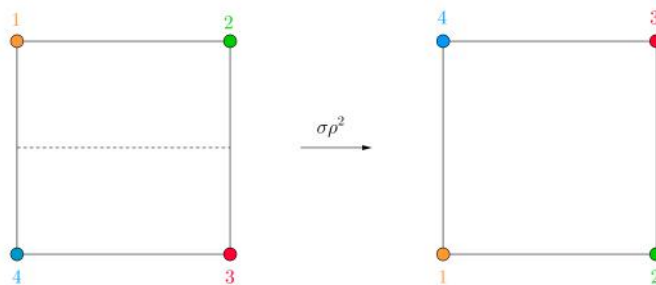
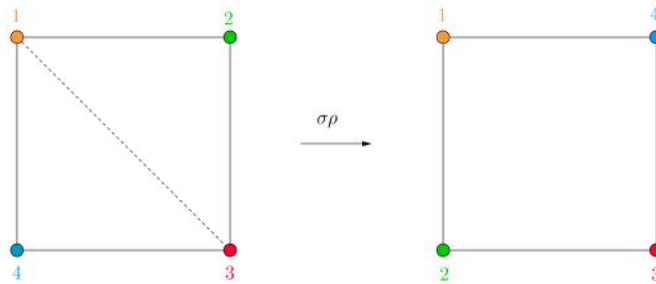
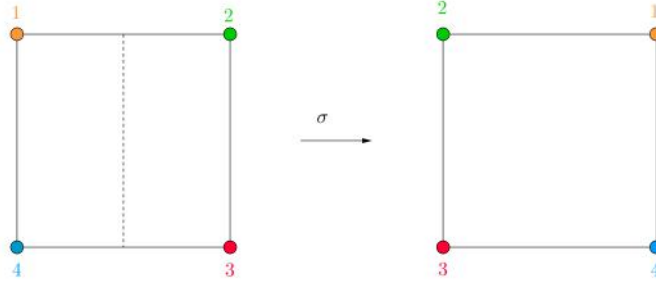


Se  $P$  é um polígono regular de  $n$  lados, com  $n \in \mathbb{N}$ , o que é uma simetria de  $P$ ? Certamente uma simetria de  $P$  é um elemento de  $Bij(P)$  ( $P$  visto como conjunto, uma vez que  $P$  pode ser identificado com o seus vértices, um conjunto de pontos no plano) no entanto, estes vértices partilham de relações: eles são conectados por arestas de um certo comprimento e, portanto, temos estrutura. Qualquer permutação dos vértices de  $P$  preserva tal estrutura? O que a quantidade de vértices de  $P$ , isto é,  $n$  nos diz sobre quão simétrico  $P$  é ou não?

Para fins ilustrativos, consideremos  $n = 4$ , então as bijeções  $P \rightarrow P$  que preservam a estrutura de  $P$  são as seguintes:

<sup>2</sup>Com a composição, tal conjunto forma o *grupo das permutações* de  $X$ . No caso particular em que  $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , onde  $n \in \mathbb{N}$ , denotamos  $Bij(X) = S_n$ .





Em resumo, o conjunto de simetrias de  $P$ , que denotaremos por  $\mathcal{S}(P)$ , possui 8 elementos que aplicam cada um dos quatro pontos fixos em um dos outros quatro e, além disso, preservam as relações definidas entre estes. Como  $\mathcal{S}(P)$  é finito, é possível construir uma tabela com os resultados da composição de quaisquer dois de seus elementos:

Tabela 1.1:  $\mathcal{S}(P)$

$\circ$	$Id$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\sigma$	$\sigma\rho^2$	$\sigma\rho$	$\sigma\rho^3$
$Id$	$Id$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\sigma$	$\sigma\rho^2$	$\sigma\rho$	$\sigma\rho^3$
$\rho$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$Id$	$\sigma\rho^3$	$\sigma\rho$	$\sigma$	$\sigma\rho^2$
$\rho^2$	$\rho^2$	$\rho^3$	$Id$	$\rho$	$\sigma\rho^2$	$\sigma$	$\sigma\rho^3$	$\sigma\rho$
$\rho^3$	$\rho^3$	$Id$	$\rho$	$\rho^2$	$\sigma\rho$	$\sigma\rho^3$	$\sigma\rho^2$	$\sigma$
$\sigma$	$\sigma$	$\sigma\rho$	$\sigma\rho^2$	$\sigma\rho^3$	$Id$	$\rho^2$	$\rho$	$\rho^3$
$\sigma\rho^2$	$\sigma\rho^2$	$\sigma\rho^3$	$\sigma$	$\sigma\rho$	$\rho^2$	$Id$	$\rho^3$	$\rho$
$\sigma\rho$	$\sigma\rho$	$\sigma\rho^2$	$\sigma\rho^3$	$\sigma$	$\rho^3$	$\rho$	$Id$	$\rho^2$
$\sigma\rho^3$	$\sigma\rho^3$	$\sigma$	$\sigma\rho$	$\sigma\rho^2$	$\rho$	$\rho^3$	$\rho^2$	$Id$

Em particular concluímos que  $\mathcal{S}(P)$  é fechado para composição, isto é, para quaisquer  $g, h \in \mathcal{S}(P)$  tem-se que  $g \circ h \in \mathcal{S}(P)$ .

Além disso, as simetrias de  $P$  se traduzem em simetria bilateral e rotacional. Podemos numerar os vértices de  $P$  de 1 a 4 como nas figuras acima e qualquer transformação  $P \rightarrow P$  que preserve a estrutura de  $P$  pode então ser obtida de composições da rotação (sentido horário)  $\rho$  de  $90^\circ$  com centro no centro do quadrado; e da reflexão  $\sigma$  pela reta que passa pelo centro do quadrado e o ponto médio da aresta 1 – 2.

Assim,  $\rho$  e  $\sigma$  que satisfazem as seguintes relações:

$$\rho^4 = \sigma^2 = Id \quad \sigma \circ \rho \circ \sigma = \rho^3$$

determinam completamente  $\mathcal{S}(P)$ .

Mais geralmente, para um polígono regular de  $n$  lados, se  $\rho$  denota a rotação de  $2\pi/n$  no sentido horário e  $\sigma$  a reflexão com relação a reta que passa pelo centro do polígono e a aresta 1 – 2, temos que o conjunto de simetrias deste polígono é  $\{Id, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}, \sigma, \sigma\rho, \dots, \sigma\rho^{n-1}\}$ , com  $\rho$  e  $\sigma$  satisfazendo as relações

$$\rho^n = \sigma^2 = Id \quad \sigma \circ \rho \circ \sigma = \rho^{n-1}$$

Agora, voltando ao exemplo em que  $n = 4$ , observe que em  $\mathcal{S}(P)$  temos uma simetria especial, a identidade, que tem a propriedade de ser neutra para composição em  $\mathcal{S}(P)$ , isto é,  $Id \circ g = g, \forall a \in \mathcal{S}(P)$ . Ademais, para cada  $g \in \mathcal{S}(P)$ , existe (um único) elemento  $h \in \mathcal{S}(P)$  tal que  $g \circ h = Id$ , isto é, toda simetria de  $P$  possui uma inversa para a composição.

O conjunto das simetrias de um quadrado (e mais geralmente de um polígono regular) é um exemplo de uma estrutura algébrica chamada **grupo**<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Observe que a composição de funções é sempre associativa

**Definição 1.** Um grupo é um objeto algébrico dado por um par  $(G, \cdot)$ , onde  $G$  é um conjunto munido de uma relação binária  $\cdot : G \times G \rightarrow G$ , satisfazendo as seguintes propriedades:

- (Associatividade):  $g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k, \forall g, h, k \in G$ ;
- (Identidade): Existe um (único) elemento de  $G$ , chamado de identidade e o qual denotaremos por  $e$ , tal que  $e \cdot g = g = g \cdot e$  para todo  $g \in G$ ;
- (Inversão): Para cada elemento  $g \in G$ , existe um (único) elemento  $h \in G$ , tal que  $h \cdot g = e = g \cdot h$ , tal elemento será denotado por  $g^{-1}$ .

Se  $H \subset G$  for fechado para a operação em  $G$  e  $(H, \cdot)$  satisfizer os axiomas de grupo dizemos que  $H$  é um subgrupo de  $G$  e denotamos  $H \leq G$ .

O subgrupo das permutações dos vértices de um polígono regular de  $n$  lados que correspondem às simetrias deste polígono é chamado de **Grupo Dedral** e será denotado por  $D_n \subset S_n$ <sup>4</sup>. Note que  $D_n$  possui  $2n$  elementos,  $n$  reflexões e  $n$  rotações.

**Exercício 1.** Verifique que  $D_n$  é mesmo um grupo para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercício 2.** Se  $X$  é um conjunto, mostre que  $Bij(X)$  é um grupo com a composição.

Agora estamos prontos para o próximo passo em direção a uma boa definição de simetria. Vamos tentar tornar a ideia de *conjunto com estrutura* mais precisa. Assim como no exemplo do quadrado, a estrutura de um conjunto é determinada pelas relações existentes entre seus elementos. Estas relações podem ser traduzidas por um conceito central em Matemática, o de *função*.

Voltando ao exemplo novamente, considere as seguintes funções  $d : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a : P \times P \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , dadas respectivamente por  $d(i, j) \doteq$  ‘distância entre os vértices  $i$  e  $j$ ’ e  $a(i, j) = 1$  se os vértices  $i$  e  $j$  são conectados por uma aresta e  $a(i, j) = 0$  caso contrário, onde  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . Aqui, identificamos  $P$  com os seus vértices, um conjunto de pontos no plano.

**Exercício 3.** Mostre que  $d(g(i), g(j)) = d(i, j)$  e  $a(g(i), g(j)) = a(i, j)$  quaisquer que sejam  $g \in D_4$  e  $i, j = 1, 2, 3, 4$ .

Finalmente,

**Definição 2.** Seja  $X$  um conjunto qualquer. Se  $X$  possui uma estrutura dada por uma função  $f : X \times X \rightarrow Y$ , então  $\phi : X \rightarrow X$  é uma **simetria** de  $(X, f)$  se e somente se  $\phi$  for inversível e

$$f(\phi(x_1), \phi(x_2)) = f(x_1, x_2)$$

para todos  $x_1, x_2 \in X$ .

---

<sup>4</sup>Ver nota anterior.



**Exercício 4.** Utilizando a definição acima tente formalizar a noção de simetria que encontramos nos itens a seguir:

1. O tronco de muitas árvores é rotacionalmente simétrico, isto é, são (essencialmente) iguais independente do lado que o vemos;
2. Boa parte dos animais possuem (exteriormente) simetria bilateral: o lado diereito é igual ao esquerdo - bastante notável mesmo em seres humanos;
3. Uma quantia significativa de flores apresenta simetria por rotações específicas;

Tente fazer o mesmo para as figuras do início do capítulo. Quais os conjuntos a serem considerados? O que permanece inalterado? Qual é a estrutura?

**Teorema 1.** Seja  $G$  o conjunto de todas as simetrias de um conjunto  $X$  com estrutura dada por uma função  $f : X \times X \rightarrow Y$ . Então  $G$  é um grupo, o qual será denotado por  $\mathcal{S}(X)$ .

*Demonstração.* Vamos mostrar que  $\mathcal{S}(X)$  é subgrupo de  $Bij(X)$ . Primeiramente, sejam  $\phi, \phi' \in \mathcal{S}(X)$ , então

$$\begin{aligned} f((\phi \circ \phi')(x_1), (\phi \circ \phi')(x_2)) &= f(\phi'(x_1), \phi'(x_2)) && (\phi \text{ é simetria}) \\ &= f(x_1, x_2) && (\phi' \text{ é simetria}) \end{aligned}$$

quaisquer que sejam  $x_1, x_2 \in X$  e, portanto,  $\mathcal{S}(X)$  é fechado para a composição. Agora, é suficiente mostrar que para cada  $\phi \in \mathcal{S}(X)$  tem-se que  $\phi^{-1} \in \mathcal{S}(X)$ . Assim, tomemos  $\phi \in \mathcal{S}(X)$ . Para todos  $x_1, x_2 \in X$  vale que

$$f(x_1, x_2) = f((\phi \circ \phi^{-1})(x_1), (\phi \circ \phi^{-1})(x_2)) = f(\phi^{-1}(x_1), \phi^{-1}(x_2))$$

onde a última igualdade segue pois  $\phi$  é simetria.<sup>5</sup> □

Enfim estamos prontos para seguir a lição de Weyl. No próximo capítulo estaremos interessados no grupo de simetrias de um tipo especial de estrutura, estudaremos os chamados espaços vetoriais e veremos que suas simetrias são as transformações lineares.

---

<sup>5</sup>A prova é análoga para  $f : X \rightarrow Y$ .



## Capítulo 2

# Simetrias em Álgebra Linear

Uma das mais importantes fontes de exemplos em Matemática e, especialmente em Geometria, é a Álgebra Linear. No estudo de uma forma geométrica seu espaço tangente desenvolve um papel fundamental uma vez que esse espaço é linear e sua geometria é dada por um produto interno. Assim, a Álgebra Linear aparece de forma natural em geometria.

Por simplicidade, nestas notas consideraremos somente os espaços  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{C}^n$ . No entanto, para os mais adaptados, as construções desse capítulo podem ser reescritas para espaços vetoriais arbitrários.

Ambos os espaços  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{C}^n$  possuem estruturas algébricas interessantes: podemos somar vetores e/ou multiplicá-los por escalares. Uma forma simples e direta de abordar tais operações é considerando vetores como matrizes coluna:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}; \quad \lambda y = \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \vdots \\ \lambda y_n \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Podemos ainda tratar das duas operações simultaneamente ao considerar  $x + \lambda y$ : a primeira operação ganhamos ao tomar  $\lambda = 1$  e a segunda tomando  $x = 0$ .

Os conjuntos  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{C}^n$  equipados com essas operações constituem exemplos de uma estrutura algébrica mais geral denominada *espaço vetorial*. O que nos permite estudar e diferenciar espaços vetoriais são suas simetrias, as *transformações lineares*.

**Definição 3.** Uma função  $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  (assuma  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) é dita uma *transformação linear* se  $T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$  para todo  $x, y \in \mathbb{K}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Transformações lineares e matrizes são objetos bastante semelhantes<sup>1</sup>. De fato, uma forma muito frutífera de se estudar uma matriz é através da transformação linear associada a ela (e vice-versa): se  $A$  é uma matriz  $m \times n$ , então ela multiplica

<sup>1</sup>que andam de mãos dadas

vetores coluna de comprimento  $n$  e os transforma em vetores de comprimento  $m$ . Ainda mais, essa ‘regra de associação’ define uma transformação linear  $T_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ :

$$\begin{aligned} T_A(x + \lambda y) &= A \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \lambda A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= T_A(x) + \lambda T_A(y). \end{aligned}$$

Por sua vez, aplicações lineares também podem ser facilmente associadas a matrizes. Para isso, notemos que  $\mathbb{K}^n$  admite um conjunto muito especial de elementos que geram o espaço todo. Sejam  $e_1, \dots, e_n$  os vetores definidos como:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Esse conjunto é comumente chamado de *base canônica*. O mais especial sobre esses vetores é que qualquer elemento de  $\mathbb{K}^n$  pode ser escrito de forma simples como uma combinação deles:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Em particular, se  $T$  é uma transformação linear,

$$T(x) = T(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 T(e_1) + \dots + x_n T(e_n), \quad (2.3)$$

e, portanto, se soubermos o valor de  $T$  nos vetores canônicos  $e_1, \dots, e_n$ , sabemos calcular  $T$  em qualquer outro vetor do espaço.

Agora, a maneira mais fácil para darmos o próximo passo é entendermos que uma função é caracterizada pelos seus valores em cada elemento. Isto é, se quisermos comparar duas funções  $f, g : X \rightarrow Y$ , o que devemos fazer é comparar seus valores em cada elemento de  $X$ : se todos os valores forem iguais, as funções são iguais porém, se um só valor for diferente, as funções são diferentes. Se você nunca se deparou com essa constatação, pare e pense um pouco sobre isso. Essa é uma informação essencial ao desenvolvermos nossa maturidade matemática. Essa é a formalização matemática da frase ‘funções são regras de associação’.

**Observação 1.** *Boa parte da matemática hoje em dia é feita em objetos de ‘alta estrutura’. O ambiente onde os objetos são inseridos é muito importante. Esses ambientes são chamados de categorias, e são nelas que são formalizados os*

conceitos mais básicos, como o conceito de igualdade. Assumam esse parágrafo como um exercício e tentem entender, por exemplo, o que significa ‘duas regras de associação’ serem diferentes.

Voltando a nossa discussão, afirmamos que existe uma matriz que representa a transformação linear  $T$  perfeitamente. Mais formalmente, existe uma única matriz  $A$  de ordem  $m \times n$  tal que  $Ae_i = T(e_i)$  para todo  $i = 1, \dots, n$  (note que  $Ae_i$  denota multiplicação da matriz por  $e_i$ , enquanto  $T(e_i)$  denota a imagem de  $e_i$  por  $T$ ). Qual é esta matriz?

**Exercício 5.** Dada uma transformação linear  $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ , encontre uma matriz  $A$  de ordem  $m \times n$  tal que  $Ae_i = T(e_i)$  para todo  $i$ . (Pense em como devem ser as colunas de  $A$ ).

Essa matriz é a matriz cuja  $i$ -ésima coluna coincide com a imagem  $T(e_i)$ , isto é,  $A = (T(e_1) \ T(e_2) \ \dots \ T(e_n))$ . Não é difícil demonstrar que  $T = T_A$  (novamente, essa é uma igualdade de funções!) Deixemos isso como exercício.

**Exercício 6.** Se  $Ae_i = T(e_i)$  então mostre que  $T(x) = Ax$  para todo  $x \in \mathbb{K}^n$ . Ainda mais, mostre que existe uma única matriz  $A$  tal que  $T_A = T$ .

Vamos enunciar o que acabamos de provar como um teorema:

**Teorema 2.** Se  $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  é uma transformação linear, então existe uma única matriz  $A$ ,  $m \times n$ , tal que  $T_A = T$ .

### 2.0.1 O Produto Interno em $\mathbb{R}^n$

O nosso intuito nesta seção é estudar as simetrias do espaço  $\mathbb{R}^n$  que preservam a distância entre pontos. Tais simetrias são chamadas de *isometrias*<sup>2</sup>. Talvez a forma mais fácil de apresentarmos tais simetrias seja primeiro introduzindo a noção de distância em  $\mathbb{R}^n$  induzida por um *produto interno*.

**Observação 2.** Observamos que existem inúmeras noções de distância em  $\mathbb{R}^n$ . Porém, as distâncias induzidas por produtos internos são as que melhor reconhecem a geometria de  $\mathbb{R}^n$ .

Sejam  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . O *produto interno padrão* entre esses vetores é definido pela expressão:

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n. \quad (2.4)$$

ou, equivalentemente:

$$\langle x, y \rangle = x^T y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

<sup>2</sup>Aqui estamos interessados nas isometrias lineares, àquelas compatíveis com a estrutura de espaço vetorial.

onde  $y^T$  é a transposta de  $y$  e a expressão ao lado direito deve ser vista como uma multiplicação matricial. O produto interno introduz dois conceitos geométricos no espaço. O primeiro é o da distância, ou comprimento:

$$\text{dist}(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

O segundo é o de ângulo. No caso particular em que  $n = 2$ , isto é, no plano, não é muito difícil ver que o menor ângulo entre os vetores  $x$  e  $y$  pode ser calculado pela expressão

$$\cos^2(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|x\|^2 \|y\|^2}.$$

A mesma expressão vale para  $n$  geral.

**Exercício 7 (Desafio).** *Se você já cursou uma disciplina de Álgebra Linear, prove a última afirmação. Assumindo que a identidade acima vale para  $n = 2$ , mostre que ela vale para  $n > 2$ . Observe que dois vetores  $x, y$  quase sempre geram um plano. Mostre que calcular o produto interno de  $x, y$  como vetores do  $\mathbb{R}^n$  é ‘idêntico’ a calculá-lo como um produto interno nesse plano. Isto é, mostre que a restrição do produto interno de  $\mathbb{R}^n$  induz um espaço isomorfo ao  $\mathbb{R}^2$  com produto interno padrão. Entenda como isso implica a afirmação.*

Ainda mais, o produto interno deve ser visto como um ‘pareamento’ de vetores, e goza das seguintes propriedades:

*Simetria:*  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ;

*Bilinearidade:* para todos  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  e todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  vale que  $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$ ;

*Positivo definido:*  $\langle x, x \rangle > 0$  para todo  $x \neq 0$ .

**Exercício 8.** *Verifique essas três propriedades.*

Equivalentemente, qualquer pareamento em  $\mathbb{R}^n$  que satisfaça essas três propriedades é, em algum sentido, equivalente ao produto interno padrão. Essa observação torna o estudo de qualquer um desses pareamentos equivalente ao do padrão. Em breve substituiremos algumas das propriedades acima para pareamentos completamente diferentes.

Como mencionado no início da seção, nossa intenção é estudar as simetrias de  $\mathbb{R}^n$  que preservam a distância entre os pontos. Iremos nos restringir a simetrias lineares.

**Definição 4.** *Uma transformação linear  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita uma isometria se*

$$\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

*para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .*

**Proposição 1.** *O conjunto de isometrias (lineares) de  $\mathbb{R}^n$  é um grupo.*

## 2.0.2 Os grupos $O(n)$

Uma forma bastante concreta de estudar o grupo de isometrias de  $\mathbb{R}^n$  é através de sua representação matricial garantida pelo Teorema 2.

Sejam  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma isometria (linear) e  $A$  a matriz representante de  $\phi$ . Vamos analisar quais são as propriedades satisfeitas por  $A$ .

**Lema 1.** Se denotarmos por  $A_i$  a  $i$ -ésima coluna de  $A$  (vistas como vetores de  $\mathbb{R}^n$ ), então  $A_i$  possui norma  $\|A_i\| = 1$  para toda  $i$ . Ainda mais, se  $i \neq j$ ,  $\langle A_i, A_j \rangle = 0$ .

*Demonstração.* Como você já deve ter notado, as colunas de  $A$  coincidem com  $Ae_i$  e  $\|e_i\| = \sqrt{\langle e_i, e_i \rangle} = 1$ . Mas como  $A$  é a matriz de uma isometria, temos que

$$\langle Ae_i, Ae_i \rangle = \langle \phi(e_i), \phi(e_i) \rangle = \langle e_i, e_i \rangle = 1.$$

Ainda mais, considerando  $Ae_i$  e  $Ae_j$ ,  $i \neq j$ , temos

$$\langle Ae_i, Ae_j \rangle = \langle \phi(e_i), \phi(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = 0.$$

□

Essas duas propriedades satisfeitas pelas colunas de  $A$  são conhecidas como ortonormalidade. Isto é, o conjunto de vetores  $A_1, \dots, A_n$  é ortonormal:  $\|A_i\| = 1$  e  $\langle A_i, A_j \rangle = 0$ , se  $i \neq j$ .

Em termos de matrizes, a expressão (2.5) é muito bem comportada. Observe, por exemplo, que

$$\langle Ax, Ay \rangle = (Ax)^T (Ay) = x^T (A^T A)y,$$

para todos  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Logo,  $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$  se e somente se  $A^T A = \text{Id}$ .

**Exercício 9.** Denote  $A^T A = B$  e observe que  $e_i^T B e_j$  é exatamente igual a entrada  $(i, j)$  da matriz  $B$ . Use esse fato para concluir que  $A^T A = \text{Id}$  (para concluir o exercício, entenda  $\text{Id}$  a partir de suas entradas  $(i, j)$ )

Qualquer uma das duas propriedades acima ( $A_1, \dots, A_n$  é uma base ortonormal ou  $A^T A = \text{id}$ ) classifica completamente o conjunto de matrizes realizadas por isometrias do  $\mathbb{R}^n$ . Isto é,

**Lema 2.** Se as colunas de  $A$  satisfazem  $\|A_i\| = 1$  e  $\langle A_i, A_j \rangle = 0$ , se  $i \neq j$ , então  $\langle T_A(x), T_A(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ .

**Exercício 10.** Use a linearidade de  $T_A$  e a propriedade  $T_A(e_i) = A_i$  para demonstrar o resultado acima.

Introduzimos agora o primeiro grupo matricial:

**Definição 5.** O grupo de matrizes ortogonais  $n \times n$ ,  $O(n)$ , é definido por

$$O(n) = \{A \text{ matriz } n \times n \mid A^T A = \text{Id}\}.$$

A teoria estabelecida até agora (mais a observação de que  $T_{AB} = T_A \circ T_B$ ) nos permite concluir que  $O(n)$  é definitivamente um grupo. Contudo, daremos uma ideia de uma demonstração independente, a fim de solidificar nossas relações com matrizes.

**Proposição 2.** *O conjunto  $O(n)$ , junto a operação de multiplicação de matrizes é um grupo, sendo a inversão e a identidade as padrões.*

*Ideia da demonstração:* Sejam  $A, B \in O(n)$ , devemos concluir que  $AB$  está em  $O(n)$ . Pelas propriedades da transposta:

$$(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T (A^T A) B = B^T \text{Id} B = B^T B = \text{Id}.$$

Ainda mais, nota-se facilmente que  $\text{Id} \in O(n)$  e, finalmente,  $A^T = A^{-1}$ , pois  $A^T A = \text{Id}$ . O resultado segue então pois

$$(A^T)^T A^T = AA^T = \text{Id}$$

isto é,  $A \in O(n) \rightarrow A^{-1} \in O(n)$ . □

**Exercício 11.** *Para completar a demonstração mostre que se  $A \in O(n)$ , então  $A$  é mesmo inversível (há maneiras diretas e indiretas de fazê-lo. Tente mais do que uma.)*

### 2.0.3 Outros Grupos Matricias

**GL(n):**

$$GL(n) = \{A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

**Sl(n):**

$$Sl(n) = \{A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}.$$

**SO(n):**

$$SO(n) = Sl(n) \cap O(n).$$

**U(n):** Seja  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  uma matriz quadrada complexa, denotamos por  $A^*$  sua transposta conjugada. O seguinte conjunto é um grupo:

$$U(n) = \{A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid A^* A = \text{id}\}.$$

**SU(n):**

$$SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det(A) = 1\}.$$

**Sp(n):** Seja  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{H})$  uma matriz quadrada com entradas quaternionicas, denotamos por  $A^*$  sua transposta conjugada. Definimos

$$Sp(n) = \{A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{H}) \mid A^* A = \text{id}\}.$$



## 2.1 $SO(n)$ , para $n = 2$

Como mencionado no prefácio, a proposta dessas notas é nos aprofundar no grupo  $SO(3)$ . Com este fim, vamos dar uma melhor noção do grupo  $SO(2)$  também.

O grupo de matrizes ortogonais  $2 \times 2$  (de determinante 1) pode ser facilmente descrito de várias formas. Aqui, observaremos que ele é, geometricamente, um círculo. Isso é facilmente alcançável, uma vez que temos clara a noção do que é um círculo (novamente retornamos à observação 1). Vejam que desenhar um círculo no plano é muito fácil, mas como poderíamos reconhecer um círculo dentro de um grupo ortogonal?

Antes de fazer uma identificação formal de  $SO(2)$  com o círculo convencional (o conjunto  $x^2 + y^2 = 1$  no plano), vamos tentar convencê-lo do fato. Primeiro, vamos mostrar como podemos parametrizá-lo.

As duas construções são baseadas no teorema 3. Para contextualizar esse teorema, notem que é razoável acreditar que uma isometria linear no plano tem que ser uma rotação. Primeiramente, uma isometria não pode deformar, esticar ou contrair em qualquer direção. Em segundo lugar, ela tem que fixar a origem, e também a orientação, já que estamos pedindo estamos interessado em isometrias de determinante 1.

**Teorema 3.** *Os elementos de  $SO(2)$  são rotações no plano. Isto é, se  $A \in SO(2)$ , então existe um único ângulo  $\theta \in [0, 2\pi)$  tal que  $A$  realiza a rotação do plano no sentido anti-horário pelo ângulo  $\theta$ .*

*Demonstração.* Vamos notar que qualquer vetor não-nulo de  $\mathbb{R}^2$  é completamente definido pela sua norma e pelo ângulo (no sentido anti-horário) que faz com o vetor  $e_1 = (1, 0)$ . De fato,

- todo vetor não-nulo de  $\mathbb{R}^2$  é um múltiplo positivo de um vetor no círculo unitário: se  $v \in \mathbb{R}^2$ , então  $\frac{v}{|v|}$  é unitário e  $v = |v| \cdot \frac{v}{|v|}$ ;
- todo vetor unitário no plano é completamente definido pelo seu ângulo (no sentido anti-horário) com  $e_1$ .

Se lembrarmos do ensino médio, o vetor unitário que forma ângulo  $\theta$  com  $e_1$  é exatamente  $v_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ . Portanto, todo vetor  $v$  pode ser escrito como  $v = |v|v_\theta$ . Ainda mais, podemos calcular  $\theta$  explicitamente:

$$\cos \theta = \langle v_\theta, e_1 \rangle = \frac{\langle v, e_1 \rangle}{|v|}, \quad \sin \theta = \frac{\langle v, e_2 \rangle}{|v|}.$$

Por exemplo: comece calculando o arccos do primeiro. Isso lhe dá no máximo dois ângulos em  $[0, 2\pi)$  - um de cada lado do eixo  $x$  - então use o segundo número para saber qual dos dois ângulos é o correto.

O resto da demonstração segue os seguintes passos:

1. Note primeiramente que  $Ae_1$  e  $Ae_2$  formam uma base ortogonal. Mais ainda, o ângulo que  $Ae_2$  faz com  $Ae_1$  é exatamente  $90^\circ$ , pois  $Ae_2$  tem que morar na reta ortogonal ao vetor  $Ae_1$ . Então, como  $Ae_2$  é unitário, só há duas possibilidades, a primeira faz um ângulo de  $90^\circ$  e a segunda  $270^\circ$ . Porém a escolha do segundo vetor faria com que  $A$  invertesse a orientação do plano. Em particular, o ângulo que  $Ae_1$  faz com  $e_1$  é igual ao ângulo que  $Ae_2$  faz com  $e_2$ . Denotamos esse ângulo por  $\alpha$ .
2. O comprimento de  $Av$  coincide com o comprimento de  $v$ . Isso é de se esperar, pois tal comprimento é exatamente a distância do final do vetor até o  $\vec{0}$ . Mas também é formalmente demonstrado pelas relações de  $SO(n)$ :

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = \langle T_A(v), T_A(v) \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2.$$

3. É fácil ver que o ângulo que  $Av$  faz com  $Ae_1$  é o mesmo ângulo que  $v$  faz com  $e_1$ . Se denotarmos o primeiro ângulo por  $\theta'$  e o segundo por  $\theta$  então:

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \frac{\langle Av, Ae_1 \rangle}{\|Av\|} = \frac{\langle v, e_1 \rangle}{\|v\|} = \cos \theta \\ \sin \theta' &= \frac{\langle Av, Ae_2 \rangle}{\|Av\|} = \frac{\langle v, e_2 \rangle}{\|v\|} = \sin \theta \end{aligned}$$

Em particular,  $\theta' = \theta + \alpha$ , onde  $\alpha$  é o ângulo que encontramos no item 1.

Portanto, se  $v = \lambda v_\theta$ ,  $Av = \lambda v_{\theta+\alpha}$ , o que conclui a demonstração. □

**Proposição 3.** A matriz  $A_\theta \in SO(2)$  que realiza a rotação por ângulo  $\theta$  é dada por

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

*Demonstração.* Seguindo a demonstração acima, vemos que basta calcular o ângulo que  $A_\theta e_1$  faz com  $e_1$ . Porém  $A_\theta e_1$ , é o vetor dado pela primeira coluna de  $A_\theta$ , e já sabemos que esse vetor faz ângulo  $\theta$  com  $e_1$ . □

A parametrização a qual nos referíamos é exatamente (2.6). Assim como o círculo, para cada ângulo  $\theta$ ,  $SO(2)$  possui um elemento,  $A_\theta$ . Ainda mais, para qualquer inteiro  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $A_{\theta+k2\pi} = A_\theta$ . Isso indica que a faixa  $[0, 2\pi)$  é colocada inteiramente em  $SO(2)$  com suas pontas ‘coladas’: como  $A_{2\pi} = A_0$ , as matrizes correspondentes aos ângulos próximos a  $2\pi$  (que, portanto, estão próximas a  $A_{2\pi}$ ) também tem que estar próximas a  $A_0$ .

Retornando à observação 1, ‘identificar  $SO(2)$  com o círculo’ é uma expressão incompleta caso o contexto não seja explicitado. Exemplificando, em vários dos contextos mais comuns, uma ‘identificação’ é uma função bijetora cuja função e a

inversa respeitam propriedades atribuídas pelo ‘contexto’: podemos requerer que a função seja somente bijetora, porém, esse caso é tão irrestritivo que  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  e o círculo são ‘iguais’ - ! ); ou podemos refinar: se a bijeção e sua inversa forem contínuas, então tratamos de topologia; se pedimos que estas sejam diferenciáveis, tratamos de topologia diferencial, ou variedades diferenciáveis; se pedirmos que a função e sua inversa preservem distância, isto é, sejam isometrias, então falamos de geometria.

Notem, porém, que antes de requerir estruturas mais finas de funções, também devemos equipar os nossos espaços de estruturas semelhantes. Afinal, é digno de questão o significado de diferenciabilidade de uma função no círculo.

Adiantamos que a questão estrutural é tão essencial que, a fim de exemplo, existem espaços que são continuamente iguais, mas diferenciavelmente diferentes. Dando mais um passo, a diferença entre as identificações diferenciáveis e as isométricas é tão absurda que, além de muito mais raras, o conjunto de identificações isométricas é geralmente de dimensão finita, enquanto que o de diferenciáveis é sempre de dimensão infinita. Por geometria, aqui pensamos em geometria Riemanniana (a que está associada a produtos internos), mas existem muitos outros conceitos de geometria onde ainda são requeridas estruturas mais algébricas (as associadas a formas hermitianas e formas anti-simétricas, por exemplo), e a incidência de identificação é ainda menor. Ainda assim existem contextos geométricos essencialmente irrelacionados com a nossa forma de pensar (a geometria algébrica, em todo seu esplendor, é um excelente exemplo).

As áreas de topologia, topologia diferencial e geometria são, essencialmente, o estudo entre as diferenças desses diferentes ‘contextos’. Atualmente, tudo indica que o nome certo a se atribuir para estes ‘contextos’ é o de *categorias*, junto a toda formalização trazida por sua teoria.

Isto posto, apresentaremos uma identificação que será tanto contínua, quanto diferenciável e isométrica (a menos de uma constante).

A identificação é simples. Ela está essencialmente escrita em (2.6). Basta enviar o vetor unitário  $(\cos \theta, \sin \theta)$  para  $A_\theta$ . No entanto, vamos apresentar uma forma independente para o cálculo de  $\theta$ .

Note que  $(a, b)^T$  está no círculo se e só se  $a^2 + b^2 = 1$ . Então, a seguinte matriz

$$A(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

é um elemento de  $SO(2)$ .

**Exercício 12.** Verifique que a matriz acima satisfaz  $A^T A = \text{Id}$ .

A correspondência  $(a, b)^T \mapsto A(a, b)$  define uma função que leva elementos do círculo em elementos de  $SO(2)$  (como vocês acabaram de provar). Para concluir a ‘igualdade’ esperada, devemos provar que essa função é uma bijeção, ou,



Não hesite em tomar algum tempo capturando uma imagem desse contexto. Vale a pena pensar em um rio fluindo e verificar essas propriedades (de forma ideal, sem pedras ou curvas abruptas, e considerando partículas muito pequenas).

Mais importante do que isso, é notar que o fluxo é completamente determinado por suas ‘direções de movimento’. Isto é, em cada ponto do espaço, ao colocarmos uma partícula nele, sabemos que aquela partícula irá se mover em uma determinada direção com sentido e velocidade determinados (ambos determinados pelo fluxo). Como sabemos, uma direção, um sentido e uma velocidade no  $\mathbb{R}^n$  nos determina unicamente um vetor de  $\mathbb{R}^n$ . Portanto, para cada ponto de  $\mathbb{R}^n$  (visto como a posição inicial da partícula), o fluxo define um único vetor de  $\mathbb{R}^n$  (determinado pelo movimento da partícula). Isso nos recupera a noção de *campo vetorial*: um campo vetorial em  $\mathbb{R}^n$  é uma função  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

No entanto, nós desencorajamos pensar em campos vetoriais da forma usual que interpretamos funções. Pelo contrário, ao invés de tentar imaginar o seu gráfico (que certamente é uma tarefa difícil se  $n \geq 2$ ), pense nesses campos como a associação de um vetor a cada ponto. Mais especificamente, pense no vetor associado a  $x$ ,  $X(x)$ , ‘grudado’ em  $x$ .

Em particular, dado um fluxo, existe um único campo definido pelo movimento que ele induz. A melhor parte é que o processo de obter campos a partir de fluxos pode ser revertido (a menos de questões técnicas). Esse fato é baseado num Teorema central da Teoria de Equações Diferenciais Ordinárias: no teorema de existência e unicidade de soluções de EDO’s<sup>3</sup>

Dado um campo de vetores  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , a importância do referido teorema está na garantia da existência de um fluxo que ‘integra’  $X$ . O Teorema garante o seguinte

**Teorema 4** (Teorema de Existência e Unicidade de EDO’s). *Dado um campo de vetores suave (e completo)  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , para cada  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , existe uma curva  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que*

$$\begin{cases} \alpha(0) = x_0; \\ \alpha'(t) = X(\alpha(t)) \end{cases} \quad (2.7)$$

Isto é, fixado um campo de vetores em  $\mathbb{R}^n$ , se uma partícula for solta em um ponto  $x_0$  de  $\mathbb{R}^n$ , ela percorrerá a trajetória determinada pelas direções indicadas pelo campo: quando a partícula estiver na posição  $x_1$  (que deve ser pensada como  $\alpha(t)$ , para algum  $t$ ), então sua velocidade será  $X(x_1)$  ( $\alpha'(t) = X(x_1) = X(\alpha(x_1))$ ).

Um campo é dito completo se todas as curvas integrais maximais estão definidas em todo  $\mathbb{R}$  (isso pode não acontecer se o campo enviar as partículas para o

<sup>3</sup>A intenção destas notas não é analítica, mas sim geométrica. Em geometria a parte técnica é quase sempre satisfeita (com exceção de problemas muito específicos, ou muito profundos). Portanto, daremos mais atenção nos resultados ‘práticos’ do que no rigor teórico.

infinito muito rápido, por exemplo). Insistimos em não abordar a questão de completude pois todos os nossos campos serão completos e fugiria do escopo deste texto. Em particular, para todos os campos de que trataremos, podemos assumir o Teorema 4.

### 2.2.1 Rotações

O nosso principal exemplo de simetria contínua é a por rotação. Para tornar precisa essa definição, imaginemos um objeto em  $\mathbb{R}^2$  e, por simplicidade, assumamos que seu eixo de rotação está na origem. Então, esse objeto é simétrico por rotação se e somente se cada ponto do objeto quando girado em torno da origem por qualquer ângulo permanece dentro do objeto.

**Exercício 14.** *Mostre que um objeto simétrico por rotações no  $\mathbb{R}^2$  é um disco, um ponto ou uma coroa circular.*

Como vimos na seção 2.1, o grupo que realiza as rotações no plano é o  $SO(2)$ . Observamos ainda que ao girarmos um ponto no  $\mathbb{R}^2$ , traçamos uma trajetória circular, as imagens do ponto pela rotação se mantêm em um círculo centrado na origem. Podemos então pensar em um fluxo exatamente com esse comportamento: uma partícula solta em um ponto  $x_0$  em  $\mathbb{R}^2$  percorre o círculo de raio  $\|x_0\|$  com velocidade **angular** de um radiano por segundo.

**Exercício 15.** *Verifique as cinco propriedades de fluxo para essa construção.*

Recordemos que a matriz  $A_\theta$  realiza a rotação do plano pelo ângulo  $\theta$ . Assim, se a partícula for liberada no ponto  $x_0$ , após  $t$  segundos, ela se encontrará no ponto  $\alpha(t) = A_t x_0$ .

Para calcularmos a velocidade da partícula no instante  $t$ , denotamos  $x_0 = (a, b)^T$ :

$$\alpha'(t) = \frac{d}{dt} \left( \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Mais ainda, um cálculo direto nos mostra que

$$\begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Se denotarmos a matriz  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  por  $I$ , temos que

$$\alpha'(t) = I\alpha(t). \quad (2.10)$$

Assim temos uma forma fechada para o campo vetorial  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definido pelo fluxo:

$$X(x) = Ix. \quad (2.11)$$

De certa forma, isso nos indica que a matriz  $I$  é uma *geradora infinitesimal de rotações*. O conceito de gerador infinitesimal pode ser estendido para além do  $\mathbb{R}^2$ . Ainda mais, existe uma forma concreta de entender o mesmo. Se pensarmos na matriz  $A_t$  como uma função de  $t$ , temos que

$$\begin{cases} A_0 = \text{id}, \\ A'_t = IA_t. \end{cases} \quad (2.12)$$

Dada uma constante  $a \in \mathbb{R}$ , podemos nos lembrar de Cálculo I e nos perguntar qual a ‘única’ função real  $f$  tal que  $f'(t) = af$ . A resposta é  $f(t) = e^{at}$ .<sup>4</sup> Vejamos o porquê disso. Novamente do Cálculo I, concluímos que a série de Taylor de  $e^{at}$  será:

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!}. \quad (2.13)$$

Abrindo a simatória, vemos que<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} (e^{at})' &= \left( 1 + at + \frac{(at)^2}{2} + \frac{(at)^3}{6} + \dots \right)' \\ &= 1' + (at)' + \left( \frac{(at)^2}{2} \right)' + \left( \frac{(at)^3}{6} \right)' + \left( \frac{(at)^4}{24} \right)' \dots \\ &= 0 + a + a^2t + a \frac{(at)^2}{2} + a \frac{(at)^3}{6} + \dots = ae^{at}. \end{aligned}$$

Nada nos impede de substituir  $a$  por uma matriz qualquer na expressão (2.13). De fato, todas as operações que usamos nessa série são potências, multiplicação por números reais e soma. Todas essas operações são válidas para matrizes quadradas. Formalmente, dada uma matriz quadrada  $A$ , podemos definir a *exponencial de  $A$*  como sendo a série

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad (2.14)$$

(note que basta tomar  $t = 1$  em (2.13).) Portanto, derivando a função  $f(t) = e^{At}$ , temos:

$$\begin{aligned} (e^{At})' &= \left( 1 + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{6} + \dots \right)' \\ &= 1' + (At)' + \left( \frac{(At)^2}{2} \right)' + \left( \frac{(At)^3}{6} \right)' + \left( \frac{(At)^4}{24} \right)' \dots \\ &= 0 + A + A^2t + A \frac{(At)^2}{2} + A \frac{(At)^3}{6} + \dots = Ae^{At}. \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Ela realmente não é única, pois  $f(t) = ce^{at}$  possui a mesma propriedade para toda constante  $c \in \mathbb{R}$ . Daí vem a necessidade de uma normalização: se pedirmos que  $f(0) = 1$ , então  $c = 1$  e temos  $f(t) = e^{at}$ .

<sup>5</sup>Em geral a conta que faremos só funciona após uma análise de convergência da série. Mas, novamente, isso sempre funcionará em nossos exemplos.

Assim, se acreditarmos que o Teorema de Existência e Unicidade vale para a equação (2.12), temos que  $A_t = e^{It}$ . E isso realmente é verdade (!).

**Exercício 16.** Usando a expansão em série de Taylor para as funções  $\sin t$  e  $\cos t$ , mostre diretamente que

$$A_t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(It)^k}{k!}.$$

Outra forma de se convencer da validade do Teorema 4 neste caso é identificar o espaço de matrizes  $2 \times 2$  com  $\mathbb{R}^4$ . Dessa forma, podemos traduzir campos de vetores e curvas entre matrizes para espaços euclidianos, o que nos possibilita aplicar o Teorema 4. Uma observação interessante é que esse teorema (a parte da unicidade) nos permite calcular a série que expressa  $e^{At}$  através de (2.12).

**Exercício 17.** Calcule as séries no Exercício 16 sabendo que as funções seno e cosseno são as únicas funções que satisfazem a equação  $f''(t) = -f(t)$ , com condições iniciais:

$$\begin{aligned} f(0) = 1, f'(0) = 0 & \quad \text{para cosseno,} \\ f(0) = 0, f'(0) = -1 & \quad \text{para seno.} \end{aligned}$$

Mais adiante, iremos provar um resultado análogo para  $SO(3)$ , porém este seguirá naturalmente das ferramentas que serão apresentadas.

## 2.2.2 A definição formal de Fluxos

Apesar de termos lidado com alguns exemplos, até o momento nos carece uma definição formal para fluxos. Vamos deixá-la explícita e tentaremos guiá-los a fim de terem uma melhor intuição da mesma.

**Definição 6.** Um fluxo em  $\mathbb{R}^n$  é uma família de difeomorfismos  $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,<sup>6</sup>  $t \in \mathbb{R}$ , satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Para cada  $x$ , a curva  $\alpha_x(t) = \varphi_t(x)$  é suave;
2.  $\varphi_0 = \text{id}$ ;
3.  $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$ .

**Exercício 18.** Como sabemos,  $\mathbb{R}$ , com sua operação de adição é um grupo abeliano. Por outro lado, a regra da cadeia nos garante que o conjunto de todos os difeomorfismos de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$  também é um grupo (composta de funções diferenciáveis é diferenciável). Mostre que as condições 2 e 3 são equivalentes a pedir que a aplicação  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^n)$ , definida por  $\chi(t) = \varphi_t$  seja um homomorfismo

<sup>6</sup>Isto é, para cada  $t$ ,  $\varphi_t$  é uma bijeção de  $\mathbb{R}^n$  tal que tanto  $\varphi_t$  quanto sua inversa são diferenciáveis.



de grupos.<sup>7</sup> (A primeira condição, em algum sentido, diz que esse homomorfismo define uma curva suave em  $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$ . A imagem de  $\chi$  em  $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$  é chamada de subgrupo a um parâmetro e também pode ser interpretada como a exponencial do campo que definiremos abaixo.)

## 2.3 A Álgebra Infinitesimal de $SO(3)$

Como visto na seção anterior,  $SO(2)$  é um grupo de rotações e possui como ‘gerador infinitesimal’ uma matriz anti-simétrica (note que  $I^T = -I$ .) Esse fato permeia toda a geometria de  $SO(n)$ , para todo  $n$ . Aqui vamos nos concentrar em  $SO(3)$  e re-representar essas ‘transformações anti-simétricas’ de forma mais familiar.

Vamos aproveitar para dar uma ideia formal do conceito de gerador infinitesimal.

### 2.3.1 Geradores Infinitesimais

Voltando a equação (2.12), nos parece natural considerar curvas em  $SO(2)$ , ou até mesmo em outros grupos matriciais. O Cálculo dessas curvas (no sentido de Cálculo I) não difere muito do que estamos acostumados, apenas devemos tratar matrizes como vetores de várias entradas. As derivadas, por exemplo, devem ser tomadas entrada a entrada (como fizemos em (2.8)).

**Exercício 19.** Dadas duas funções  $A(t)$  e  $B(t)$ , escreva suas  $(i, j)$ -ésimas entradas como  $a_{ij}(t)$  e  $b_{ij}(t)$ . Verifique que a  $(i, j)$ -ésima entrada da função  $C(t) = A(t)B(t)$  é

$$c_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)b_{kj}(t).$$

Mostre que

$$C'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

Quando tratamos da função exponencial em  $\mathbb{R}$ , ou mesmo no exemplo em  $SO(2)$ , consideramos uma curva cuja derivada no instante  $t$  é o produto do valor da função em  $t$  por um objeto fixo, seja uma constante  $a \in \mathbb{R}$  ou uma matriz  $I \ 2 \times 2$ . Esse produto nos dá a direção e a velocidade da curva. Veremos que podemos tratar curvas em  $SO(n)$  de forma similar, apenas assumindo que a matriz que multiplica a função não seja a mesma para todo  $t$ . Entretanto, o mais surpreendente, é que essa interpretação nos dá completo controle para onde podemos ‘girar’ para continuar em  $SO(n)$ <sup>89</sup>

<sup>7</sup>Dica: Não tenha medo. É mais fácil do que você pensa

<sup>8</sup>Nesse momento é frutífero pensar em  $SO(n)$  como um subconjunto de  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Dessa forma fica claro que, independente de onde estivermos em  $SO(n)$ , não são todas as direções que nos mantêm dentro desse subconjunto. Tome a direção normal na esfera em  $\mathbb{R}^3$ , por exemplo. Um só instante nessa direção já é suficiente para sair da esfera.

<sup>9</sup>Os interessados verão que esse é exatamente o conceito de vetor tangente de uma subvariedade



Portanto, para todo  $\lambda$ ,

$$-\lambda^3 - a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_0 = -\lambda^3 + a_2\lambda^2 - a_1\lambda + a_0. \quad (2.16)$$

Tomando  $\lambda = 0$ , concluímos que  $a_0 = 0$ . Mas  $\det(A) = p(0) = a_0$  e, portanto,  $\det(A) = 0$ .  $\square$

Em geral, matrizes anti-simétricas, entre outras, decompõe o espaço em subespaços ortogonais. Mais especificamente, a decomposição que nos interessa nesse momento é a dada pelo núcleo da matriz  $A$  e seu complemento ortogonal. Após o seguinte exercício, vamos formalizar o que queremos dizer.

**Exercício 21.** Use (2.5) para mostrar que  $A$  é uma matriz anti-simétrica se e somente se

$$\langle Ax, y \rangle = -\langle x, Ay \rangle$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

**Proposição 5.** Se  $V \subset \mathbb{R}^3$  é o plano ortogonal ao núcleo de  $A$ , então  $A$  mantém  $V$  invariante. Isto é, para todo  $x \in V$ ,  $Ax \in V$ .

*Demonstração.* Seja  $v$  um elemento no núcleo de  $A$  e  $x$  um elemento ortogonal ao núcleo de  $A$ . Usando o exercício 21, temos

$$0 = \langle Av, x \rangle = -\langle v, Ax \rangle.$$

Em particular,  $Ax$  é ortogonal a  $v$ . Porém, como  $v$  é um elemento arbitrário do núcleo, concluímos que  $Ax$  é ortogonal ao núcleo inteiro.  $\square$

Ainda mais, se pensarmos em  $V$  como um espaço de dimensão 2 e considerarmos a transformação linear definida por  $A$  dentro dele, essa transformação será também anti-simétrica - basta usar o Exercício 21. Isto é, a matriz de  $T_A|_V : V \rightarrow V$ <sup>12</sup> é uma matriz anti-simétrica. Por ventura, toda matriz anti-simétrica  $2 \times 2$  é múltipla da matriz  $I$  da seção 2.1. Como subproduto, ganhamos uma interpretação da matriz  $A$ :  $A$ , uma matriz anti-simétrica  $3 \times 3$  gera infinitesimalmente uma rotação de  $3 \times 3$  em relação ao núcleo de  $A$ .

Outra forma de entendermos isso é entender como  $T_A$  transforma o espaço  $V$ .

**Exercício 22.** Seja  $A$  uma matriz anti-simétrica  $3 \times 3$  não-nulo e considere  $x$ , um vetor não-nulo ortogonal ao núcleo de  $A$ .

1. Mostre que  $Ax$  é um vetor não-nulo ortogonal a  $x$ ;
2. Mostre que a matriz de  $T_A|_V$  em relação a base  $\{x, Ax/|Ax|\}$  é exatamente  $I$ .

<sup>12</sup>A definição de  $T_A$  vimos no início do capítulo. A notação  $|_V$  refere-se a restrição da função a  $V$  - note que essa restrição só é possível pois  $T_A(x) \in V$ , para todo  $x \in V$ .







## Capítulo 3

# Topologia de $SO(3)$

O conjunto de elementos de  $SO(3)$  tem uma geometria interessante por si só. Podemos pensar no conjunto de todas as matrizes  $3 \times 3$  como um espaço de 9 dimensões: se escrevermos uma matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

podemos simplesmente colocar uma coluna debaixo da outra e pensar na matriz como um vetor do  $\mathbb{R}^9$ :

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ a_{31} \ a_{32} \ a_{33})^T.$$

Dessa forma, podemos interpretar  $SO(3)$  como um subconjunto dentro do  $\mathbb{R}^9$ . Em particular, adquirindo um formato geométrico próprio.

O formato geométrico desse conjunto é bastante peculiar. Localmente  $SO(3)$  é redondo como uma esfera, porém apresenta propriedades topológicas muito distintas. Exibiremos essa propriedade em uma versão subsequente. Mais particularmente, se tomarmos qualquer círculo na esfera, podemos contraí-lo até se tornar um ponto<sup>1</sup>. Veremos que isso não é verdade no caso de  $SO(3)$ . A representação física desse fato é facilmente descrita (e a veremos em breve).

### 3.1 A Álgebra Quaterniônica

Iniciaremos o capítulo introduzindo uma ferramenta muito útil para lidar com vários objetos geométricos, a *álgebra quaterniônica*. Ela é uma ferramenta extraordinária e nos dá uma nova forma de representar os elementos de  $SO(3)$ , além de estudar sua geometria.

Você já deve ter ouvido falar em quatérnions, e, a fim de desmistificá-los, vamos afirmar que eles não existem (!)<sup>2</sup>. Ou pelo menos não são objetos por si só.

<sup>1</sup>Para isso, pode pensar na esfera  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , mas, em realidade, estaremos falando de  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$

<sup>2</sup>Isso não é verdade. Só escrevemos assim para chocá-los.

Talvez a forma mais concreta de introduzi-los seja insistir no fato de que não existem quatérnions, mas sim uma regra de multiplicação para vetores do  $\mathbb{R}^4$ .

Por conveniência, ao invés de escrevermos  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)^T$ , iremos escrever  $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ . A multiplicação quaterniônica segue as regras abaixo. Dados  $x, y, z \in \mathbb{R}^4$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e escrevendo  $1 = (1, 0, 0, 0)^T$ , temos

1. *Multilinearidade:*

$$x(\lambda y + z) = \lambda(xy) + xz, \quad (x + \lambda y)z = xz + \lambda(yz)$$

2. *Associatividade:*

3. *Unidade:*  $1x = x1 = x$ ;

4. *Identities quaterniônicas:*  $ijk = i^2 = j^2 = k^2 = -1$ .

Essas regras definem completamente a multiplicação quaterniônica. De fato, a partir da regra 4 podemos concluir que

$$ij = -ji = k, \quad ki = -ik = j, \quad jk = -kj = i. \quad (3.1)$$

Usando as duas primeiras regras temos para elementos arbitrários

$$\begin{aligned} xy &= (x_0 + x_1i + x_2j + x_3k)(y_0 + y_1i + y_2j + y_3k) \\ &= x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 \\ &\quad + (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2)i \\ &\quad + (x_0y_2 + x_2y_0 + x_3y_1 - x_1y_3)j \\ &\quad + (x_0y_3 + x_3y_0 + x_1y_2 - x_2y_1)k. \end{aligned} \quad (3.2)$$

O caso especial onde  $x_0 = y_0 = 0$  pode ser expressado através de objetos familiares: se denotarmos os vetores de  $\mathbb{R}^3$  como  $x = x_1i + x_2j + x_3k$ , teremos

$$xy = -\langle x, y \rangle + x \times y, \quad (3.3)$$

onde  $\langle, \rangle$  e  $\times$  denotam os produtos interno e vetorial, respectivamente.

**Exercício 25.** Verifique as identidades em (3.1)-(3.3).

Essas regras definem uma estrutura multiplicativa muito bem comportada em  $\mathbb{R}^4$ . Por exemplo, se  $u \in \mathbb{R}^4$  não é o elemento nulo, então  $u$  possui uma inversa única; se  $x, y \in \mathbb{R}^4$  são ambos diferentes de zero, então  $xy \neq 0$ . Isso mostra que essa multiplicação não perde ‘informação’. Para se ter uma noção do quanto essas características são extraordinárias, as únicas dimensões onde  $\mathbb{R}^n$  admite uma estrutura semelhante são  $n = 1$  (a reta real),  $n = 2$  (os números complexos),



$n = 4$  (quatérnions) e  $n = 8$  (octonions ou números de Cayley). Enquanto que a estrutura dos números reais e a dos complexos é bastante fácil de lidar, a estrutura octoniônica é bem mais elaborada.

Assim como no caso de números complexos, gostaríamos de diferenciar a parte real da parte imaginária, quando vemos um elemento de  $\mathbb{R}^4$  como um quatérnion. Estas são definidas da seguinte forma:

**Definição 7.** *Seja  $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ . A parte real de  $x$  e a parte imaginária de  $x$  são definidas como*

$$\Re(x) = x_0, \quad \Im(x) = x_1i + x_2j + x_3k.$$

Um vetor que satisfaz  $\Re(x) = 0$  é chamado de imaginário puro.

### 3.1.1 O Grupo de Quatérnions Unitários

A norma de um vetor de  $\mathbb{R}^4$  através de sua representação ‘quatérnionica’:  $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$  é dada pelo quadrado de suas coordenadas:

$$\|x\|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Uma ferramenta útil em calculá-la é a operação de conjugação quatérnionica. Dado  $x$  como acima, definimos

$$\bar{x} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k. \quad (3.4)$$

É fácil de ver que essa operação é linear, e que respeita a multiplicação quatérnionica:

$$\begin{aligned} \overline{x + \lambda y} &= \bar{x} + \lambda \bar{y} \\ \overline{xy} &= \bar{y}\bar{x}. \end{aligned}$$

Com essa operação definida, concluímos que

$$\bar{x}x = \|x\|^2 \quad (3.5)$$

Essas duas observações permitem verificar facilmente que a álgebra quatérnionica dá ao conjunto de vetores unitários de  $\mathbb{R}^4$  uma estrutura de grupo.

**Proposição 6.** *Seja*

$$\mathbb{S}^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\|^2 = 1\}.$$

*Então, para  $x, y \in \mathbb{S}^3$ , vale que*

- $xy \in \mathbb{S}^3$  e
- $x^{-1} = \bar{x} \in \mathbb{S}^3$ .



A partir de agora, nosso interesse será entender a geometria do espaço  $SO(3)$  como um subconjunto de  $\mathbb{R}^9$ . Parte disso será feito através da aplicação induzida pela construção acima. Isto é, pela aplicação

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{S}^3 &\rightarrow SO(3) \\ q &\mapsto T_q. \end{aligned}$$

Iniciaremos estudando algumas propriedades dessa aplicação.

### 3.2 Propriedades da aplicação $\pi$

A aplicação  $\pi$  é de 2 para 1. Isto é, para cada elemento de  $SO(3)$ , existem exatamente dois elementos de  $\mathbb{S}^3$ : a dizer, se  $T_q = A$ , então  $T_{-q} = A$ .<sup>3</sup>

Essa seção dedica-se a demonstrar a sobrejetividade da aplicação  $\pi$  e a propriedade geodésica dela. A se dizer, nas próximas seções demonstraremos que toda matriz  $A \in SO(3)$  pode ser realizada como a matriz da aplicação  $T_q$ , para algum  $q \in \mathbb{S}^3$ .

A seguir, como subproduto do método usado, demonstramos que a aplicação  $\pi$  preserva a geometria de  $\mathbb{S}^3$ , levando geodésicas de  $\mathbb{S}^3$  em geodésicas de  $SO(3)$ .

#### 3.2.1 Sobrejetividade

Algo não tão trivial é verificar a sobrejetividade da aplicação  $\pi$ . Isto é, que cada elemento de  $SO(3)$  pode ser representado como algum  $T_q$ . Esse fato pode ser demonstrado sem muita dificuldade com ferramentário mais avançado<sup>4</sup>. Para nos manter apenas com ferramentas elementares, estudaremos mais a fundo a estrutura das transformações em  $SO(3)$ . Mais especificamente, generalizaremos o Teorema 3 mostrando que todo elemento de  $SO(3)$  é uma rotação de  $\mathbb{R}^3$  em relação a algum eixo. Subsequentemente, mostraremos que todas essas rotações são realizadas pelas aplicações  $T_q$ .

**Teorema 7.** *Se  $A \in SO(3)$ , então existe um vetor não-nulo  $v \in \mathbb{R}^3$  tal que*

$$Av = v.$$

*Ainda mais, se  $V$  é o complementar ortogonal de  $V$ , então  $T_A|_V : V \rightarrow V$  realiza uma rotação em  $V$ .*

A reta gerada por  $v$  será o eixo em que  $A$  gira  $\mathbb{R}^3$ . Relembrando que  $T_q$  é um elemento de  $SO(3)$ , podemos nos perguntar se podemos expressar o eixo de  $T_q$  de forma simples. Caso  $q = 1$  ou  $q = -1$ , então  $T_q$  é exatamente a identidade e, além

<sup>3</sup>De fato, para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $T_{-q}(x) = (-q)x(-\bar{q}) = (-1)^2qx\bar{q} = T_q(x)$ .

<sup>4</sup>Não é difícil mostrar que  $\pi$  é topologicamente aberta e fechada, portanto é sobrejetiva em todas as componentes conexas que toca. Para o primeiro, uma conta direta mostra que a diferencial de  $\pi$  é um isomorfismo; ela também é automaticamente fechada, pois  $\mathbb{S}^3$  é compacto.

de todo vetor gerar um eixo, a rotação é a trivial. Se  $q \neq \pm 1$ , então  $\Im(q) \neq 0$  e, para simplificar a notação, podemos tomar  $\frac{\Im(q)}{|\Im(q)|} = u$ . Análogo ao caso de números complexos, existe um único  $\theta$  tal que  $q = \cos \theta + \sin \theta u$ . Nesse sentido, ainda vale a identidade  $q = e^{\theta u}$ <sup>5</sup>, usando a exponencial em (2.13). Mostraremos mais tarde que  $T_q$  realiza a rotação de ângulo  $2\theta$  em relação ao eixo gerado  $u$ .

**Exercício 27.** *Certifique-se de que você não está sendo enganado: mostre que, se  $Av = v$ , então a reta definida por  $v$  é inteiramente fixa por  $A$ .*<sup>6</sup>

**Exercício 28.** *Convença-se que o autor continua não lhe enganando ao dizer ‘eixo de rotação’. Isto é, se  $A \in SO(3)$  não é a identidade, mostre que  $A$  só possui um eixo de rotação.*<sup>7</sup>

**Exercício 29.** *Se  $q \neq \pm 1$ , mostre que  $u = \frac{\Im(q)}{|\Im(q)|}$  gera o eixo de  $T_q$ .*<sup>8</sup>

*Demonstração do Teorema 7:* A primeira parte do teorema segue do estudo do polinômio característico de matrizes de  $SO(3)$ . A segunda parte segue da primeira, ao analisar a ação de um elemento de  $SO(3)$  em relação ao plano ortogonal ao seu eixo de rotação.

A primeira parte será dividida nos dois seguintes lemas.

**Lema 6.** *Se  $A \in SO(3)$ , então  $A$  possui uma raiz real positiva.*

*Demonstração.* Seja  $p(\lambda) = \det(A - \lambda \text{id})$ . Então  $p$  é um polinômio de grau três e, portanto, tem uma raiz real. Vamos denotar suas três raízes como  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , sendo que podemos assumir  $\lambda_1$  real. Temos duas possibilidades para essas três raízes. O teorema seguirá em ambas as possibilidades através da identidade

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (3.9)$$

(1) As três são reais: nesse caso, se as três raízes forem negativas, (3.9) implica que  $0 > \det(A) = 1$ , uma contradição.

(2) Duas raízes são imaginárias: sabemos da teoria de polinômios que raízes complexas vêm em pares. Mais precisamente, se  $\lambda$  for uma raiz não real de  $p$ , então  $\bar{\lambda}$  também é raiz de  $p$ <sup>9</sup>. Nesse caso, vamos assumir  $\lambda_1$  real e  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_3$ . Novamente pela equação (3.9),

$$1 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2 \bar{\lambda}_2 = \lambda_1 |\lambda_2|^2. \quad (3.10)$$

Portanto  $\lambda_1 = 1/|\lambda_2|^2$  é um número positivo. □

<sup>5</sup>Análogo ao caso complexo, temos  $e^{\pi u} = -1$ . Isso pode parecer inesperado, porém, não é difícil de observar que o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  gerado por  $1$  e  $u$  se comporta exatamente como os números complexos. Com a única diferença que a raiz de  $-1$  é chamada de  $u$  e não de  $i$ . Note ainda que  $u$  é uma raiz de  $-1$  (!)

<sup>6</sup>Como representar um elemento da reta definida por  $v$  através de  $v$ ? Note que ‘multiplicar por  $A$ ’ é uma operação linear, e já sabemos o resultado dessa operação em  $v$ .

<sup>7</sup>Trabalhe essa questão por contradição. Mostre que se  $A$  possuir dois eixos distintos, então  $A = \text{id}$ .

<sup>8</sup>Isto é, mostre que  $T_q(u) = u$ .

<sup>9</sup>Note que  $0 = \bar{0} = \overline{p(\lambda)} = p(\bar{\lambda})$ .

**Lema 7.** Se  $\lambda$  é uma raiz de  $p$ , então  $|\lambda| = 1$ .

*Demonstração.* Se  $\lambda$  é real, então existe  $v \in \mathbb{R}^3$  não-nulo tal que  $Av = \lambda v$ . Como  $A$  é uma isometria, então

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \|v\|^2,$$

portanto  $|\lambda| = \pm 1$ . Se  $\lambda$  não é real, então estamos no caso (2) do Lema 6. Nesse caso, já sabendo que  $\lambda_1 = \pm 1$ , temos que  $|\lambda_2| = 1$ <sup>10</sup>.  $\square$

Sabendo que  $A \in SO(3)$  possui um autovalor positivo  $\lambda$ , tal que  $|\lambda| = 1$ , então existe um autovetor  $v \in \mathbb{R}^3$  tal que  $Av = v$ , como desejado.  $\square$

Isso demonstra a primeira parte do Teorema 7. A segunda parte é muito similar ao caso de matrizes anti-simétricas.

**Lema 8.** Seja  $A \in SO(3)$  uma matriz diferente da identidade e  $v \in \mathbb{R}^3$  tal que  $Av = v$ . Então, se  $V$  é o plano ortogonal a  $v$ ,  $A$  mantém  $V$  invariante, isto é, se  $x \in V$ ,  $Ax \in V$ .

**Exercício 30.** Se  $Av = v$ , use a identidade  $A^T A = \text{id}$  para mostrar que  $A^T v = v$ . Depois use as ideias na demonstração da Proposição 5 para mostrar que  $\langle Ax, v \rangle = \langle x, v \rangle$ .

**Exercício 31.** Use o exercício anterior para demonstrar o Lema 8.

O último fato a ser observado é que  $A$  realmente induz uma rotação em  $V$ . A ideia da demonstração é entender que  $T_A|_V$  é uma transformação de  $SO(2)$ , portanto o Teorema 3 nos garante que é uma rotação.

Porém, como  $A$  preserva o comprimento dos vetores em  $V$ , então  $T_A|_V$  é uma isometria com as seguintes possibilidades de autovalores: todos os autovalores iguais e de módulo 1 iguais a 1 ou todos iguais a  $-1$ ; ou dois autovalores complexos,  $\lambda$  e  $\bar{\lambda}$ . Em ambos os casos ganhamos um elemento de  $SO(2)$ , ou seja, uma rotação.

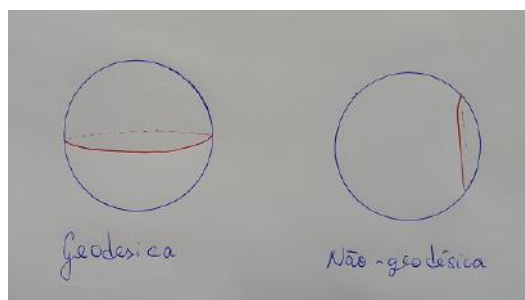
Assim concluímos que a aplicação  $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow SO(3)$  cobre cada elemento de  $SO(3)$  exatamente por dois elementos de  $\mathbb{S}^3$ :  $q$  e sua antípoda. Isso nos permitirá ter uma representação palpável de  $SO(3)$  na seção 3.4.

Como consequência da sobrejetividade, também concluímos que  $SO(3)$  é um subconjunto *conexo*. Mais especificamente, podemos ligar dois pontos de  $SO(3)$  por uma curva. Como  $\mathbb{S}^3$  possui tal propriedade e  $\pi$  é sobrejetiva, então uma curva que liga  $q$  a  $p$  em  $\mathbb{S}^3$ , ligará  $\pi(p)$  a  $\pi(q)$  em  $SO(3)$ .

<sup>10</sup>Essa demonstração é uma forma simples de encobrir um fato muito mais geral: se  $\lambda$  é autovalor de  $A \in O(n)$ , então  $|\lambda| = 1$ .

### 3.3 Geodésicas em $\mathbb{S}^3$ e $SO(3)$

Geodésicas em  $\mathbb{S}^3$  possuem uma descrição geométrica similar as geodésicas em  $\mathbb{S}^2$ : uma geodésica em  $\mathbb{S}^3$  é um grande círculo, isto é, é a interseção de um plano passando por zero com  $\mathbb{S}^3$  <sup>11</sup>.



Uma geodésica é completamente definida por um ponto inicial e uma direção <sup>12</sup>. Isso é bastante bem expresso no caso da esfera: toda geodésica de  $\mathbb{S}^2$  que passa pelo polo norte pode ser parametrizada como

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin tv_1 \\ \sin tv_2 \end{pmatrix},$$

onde  $v_1^2 + v_2^2 = 1$ . Análisisando  $\gamma$  vemos que ela parte de  $\gamma(0) = (1, 0, 0)^T$ , com velocidade inicial  $\gamma'(0) = (0, v_1, v_2)^T$ . Também observamos que  $\gamma$  é exatamente a geodésica definida pelo plano gerado por esses dois vetores.

Isso é verdade em geral. Exploremos o caso de  $\mathbb{S}^3$ : dado  $u = u_1i + u_2j + u_3k = (0, u_1, u_2, u_3)^T$ , podemos considerar o plano gerado por  $1 = (1, 0, 0, 0)^T$  e  $u$ . Não é difícil de ver que o círculo definido por esse plano em  $\mathbb{S}^3$  é parametrizado por  $\cos t + \sin tu$ . O mesmo ocorre em  $SO(3)$ . Uma geodésica em  $SO(3)$  que passa por  $id$  tem sua direção definida por uma matriz anti-simétrica: dada  $A$  tal que  $A^T = -A$ , então  $e^{tA}$  é a geodésica que passa por  $id$  com velocidade  $A$ .

Por outro lado, também vimos que todas as matrizes anti-simétricas são realizadas por produtos vetoriais. Isto é, se  $A$  é uma matriz anti-simétrica, então existe um vetor  $v$  tal que  $Ax = v \times x$  para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ . Análogo a operação  $T$ , definiremos a aplicação  $A$ ,

$$A_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto v \times x.$$

Como na seção 3.2.1, denotaremos  $e^{tu} = \cos t + \sin tu$ . Observando que tanto  $T_{e^{tu}}$  e  $e^{2tAu}$  realizam a rotação com eixo  $u$  e ângulo  $2t$ , concluímos que

<sup>11</sup>Caso não esteja acostumado com geodésicas em  $S^2$ , é melhor tentar visualizar o que estamos falando

<sup>12</sup>De forma muito geral, isso vale em geometria Riemanniana

**Teorema 8.**

$$\pi(e^{tu}) = e^{2tAu}.$$

Em particular,  $\pi$  leva geodésicas de  $S^3$  em geodésicas de  $SO(3)$ .<sup>13</sup>

**Exercício 32.** Para que tenham noção da rigidez dessa propriedade, vamos explorar alguns exemplos de relações entre geodésicas e espaços.

1. Mostre que não existe nenhuma aplicação bijetiva  $f : T^2 \rightarrow S^2$  que leva geodésicas do toro em geodésicas da esfera.
2. Mostre que a aplicação  $(t, s) \mapsto (\cos t, \sin t, \cos s, \sin s)$  leva geodésicas de  $\mathbb{R}^2$  em geodésicas no toro de Clifford.
3. Descreva como seria uma aplicação que envia geodésicas saindo da origem em  $\mathbb{R}^2$  para geodésicas saindo de  $(1, 0, 0)$  em  $S^2$ .
4. Mostre que não existe aplicação que envia geodésicas de  $\mathbb{R}^2$  para geodésicas em  $\mathbb{R}^2$ .

Como corolário do Teorema 8, concluímos que todo elemento de  $SO(3)$  é a exponencial de uma matriz anti-simétrica, isto é, para todo  $T \in SO(3)$ , existe  $A$  anti-simétrica,  $e^A = T$ .

### 3.4 Vizualizando $S^3$ e $SO(3)$

Nossa mente está adaptada a objetos dentro de três dimensões não é uma tarefa confortável<sup>14</sup>. Uma forma de contornar essa situação, talvez perdendo um pouco menos de intuição geométrica, é sacrificando um pouco da geometria e usando representações mais grosseiras.

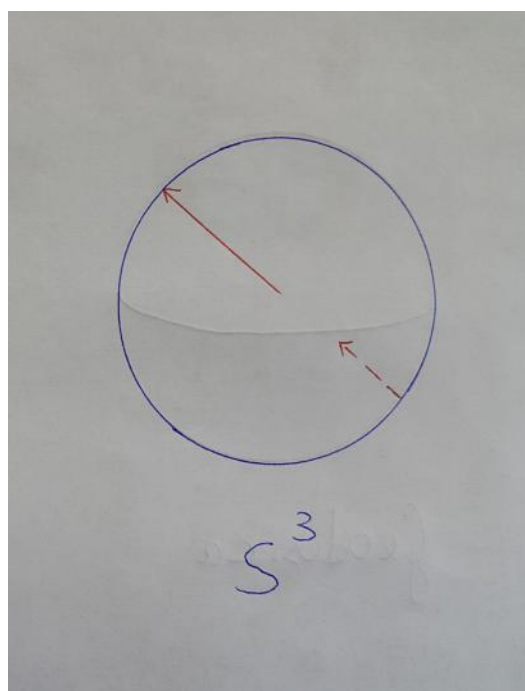
Considere o disco de raio  $\pi$  em  $\mathbb{R}^3$ ,

$$D^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|^2 \leq \pi\}.$$

Podemos descrever a esfera  $S^3$  através desse disco, basta considerar a fronteira do disco (a esfera que o limita) como um ponto só. Caso essa ideia soe estranho, geometricamente podemos nos reduzir as seguintes regras:

<sup>13</sup>Nós só provamos isso para geodésicas saindo de 1 e id. Desafiamos o leitor a mostrar que essa afirmação é válida para qualquer geodésica, saindo de qualquer ponto.

<sup>14</sup>Adicionar uma quarta dimensão não é extremamente difícil, mas é questionável se realmente temos sequer intuição em três dimensões - note que nossa imagem ocular é no fundo, bidimensional. Matematicamente, dimensões são dadas por coordenadas, que são representados por números. Três dos números que usamos são as coordenadas espaciais padrões, se quisermos adicionar uma quarta dimensão espacial, podemos associar a cada ponto um novo número - ou, para facilitar - uma nova cor, usando de sua frequência espectral por exemplo. Utilizando cores então a regra de espacialidade é que duas partículas ocupam o mesmo lugar no espaço se e somente se elas possuem as mesmas três coordenadas padrões e exatamente a mesma cor. Como um exercício, você pode provar com isso que qualquer nó é desatável em 4 dimensões, mesmo se você colar as duas extremidades soltas da corda.



1. Se, em qualquer momento, nos encontrarmos no bordo do disco, podemos entrar em seu interior intantaneamente por qualquer direção - isto é, não há deslocamento no bordo do disco; na prática, você está em todos os pontos de uma vez;
2. Se nos deslocarmos no disco com velocidade constante ao longo de um raio, ao tocarmos a fronteira no ponto  $x_0$ , entraremos instantaneamente no disco através de  $-x_0$ , andando com a mesma velocidade e direção.

O primeiro item representa exatamente a ideia do bordo ser um ponto só. O segundo item tenta recuperar a diferenciabilidade no bordo.

Essa representação da esfera é induzida por suas geodésicas. Para entender melhor esses itens, podemos nos referir à representação análoga para  $\mathbb{S}^2$ :

Dessa vez o disco é de dimensão 2 e embrulha a esfera a partir do polo norte, seguindo as linhas longitudinais, isto é, as geodésicas que partem do polo norte. Dessa forma, essa ‘aplicação’ entre o disco e a esfera é injetora no interior do disco, porém todos os pontos no bordo do disco colapsam no polo sul.

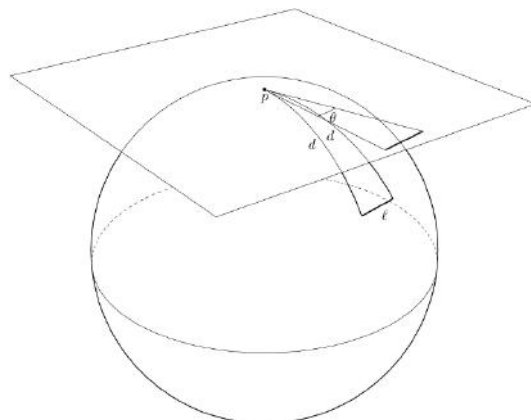
A mesma imagem acontece para  $\mathbb{S}^3$ , sendo a única diferença dimensional.

### 3.4.1 Vizualizando $SO(3)$

O Teorema 8 também nos permite modelar  $SO(3)$  de forma análoga. Recordemos que  $\mathbb{S}^3$  está em uma relação de 2 para 1 com  $SO(3)$ , mais precisamente,  $\pi(q) = \pi(-q)$ . Por esse motivo, precisaremos apenas de metade do disco para a representação.



### 3.4. VIZUALIZANDO $S^3$ E $SO(3)$

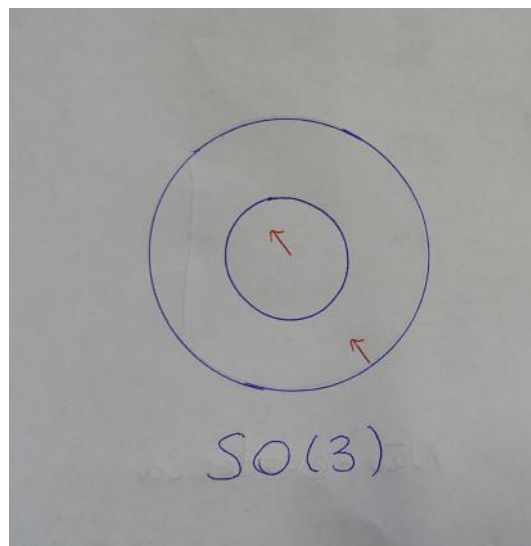


A representação de  $S^3$  que acabamos de ver realiza a exponencial de imaginários puros (e mais geralmente, a exponencial geodésica do espaço tangente ao pólo norte). O análogo realizará a exponencial de matrizes anti-simétricas.

Uma conta direta nos mostra o seguinte:

1.  $-e^{tu} = -\cos t + \sin t(-u) = \cos(\pi - t) + \sin(\pi - t)\bar{u} = e^{(\pi-t)\bar{u}}$ ;
2. em particular  $t = \pi/2$ ,  $-e^{\frac{\pi}{2}u} = e^{\frac{\pi}{2}\bar{u}}$ .

Em particular,  $e^{t2A_u} = e^{(\pi-t)2A_{\bar{u}}}$ . Abaixo ilustramos essa situação em um corte transversal do disco de raio  $\pi$ :



Como a aplicação  $\pi$  é sobrejetora, não só podemos usar a coordenada  $u$  para parametrizar as matrizes anti-simétricas, mas também concluímos que (nessa parametrização) o disco de raio  $\pi/2$  cobre o  $SO(3)$ .

Portanto, para representar cada elemento de  $SO(3)$ , consideramos o disco de raio  $\pi/2$  com as seguintes regras:

1. Se, em qualquer momento, nos encontrarmos no ponto  $x_0$  no bordo do disco, podemos entrar em seu interior através de  $x_0$  ou  $-x_0$  - isto é, não há deslocamento caso queiramos entrar por qualquer um desses lados, mas podemos nos deslocar no bordo para entrar por outro lugar;
2. Se nos deslocarmos no disco com velocidade constante ao longo de um raio, ao tocarmos a fronteira no ponto  $x_0$ , entraremos instantaneamente no disco através de  $-x_0$ , andando com a mesma velocidade e direção.

O espaço de dimensão três que satisfaz essas regras é conhecido como espaço projetivo real de dimensão três. Ele também pode ser visto como uma complementação do  $\mathbb{R}^3$  para considerarmos que ‘linhas paralelas se encontram no infinito’.

**Exercício 33** (Uma parametrização do plano projetivo). *O plano projetivo (de dimensão 2) possui muitas representações geométricas, porém daremos uma que realiza a sua geometria natural: a esférica. Considere  $\mathbb{S}^2 = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid |u|^2 = 1\}$ , a esfera composta de imaginários puros.*

1. *Mostre que  $T_{-u} = T_u$ , onde  $T$  é como 3.8.*
2. *Use a representação de  $\mathbb{S}^2$  análoga a realizada para  $\mathbb{S}^3$  nessa seção para mostrar que a imagem de  $\mathbb{S}^3$  por  $\pi$  possui uma representação análoga a de  $SO(3)$  realizada nessa seção.*
3. *Convença-se de que essa representação é a do plano projetivo.*
4. *Mostre que  $T_u$  é uma matriz simétrica. Em particular, que o subconjunto  $\pi(\mathbb{S}^2)$  está dentro do espaço de matrizes simétricas  $3 \times 3$ , que é um espaço euclidiano de dimensão 6.*

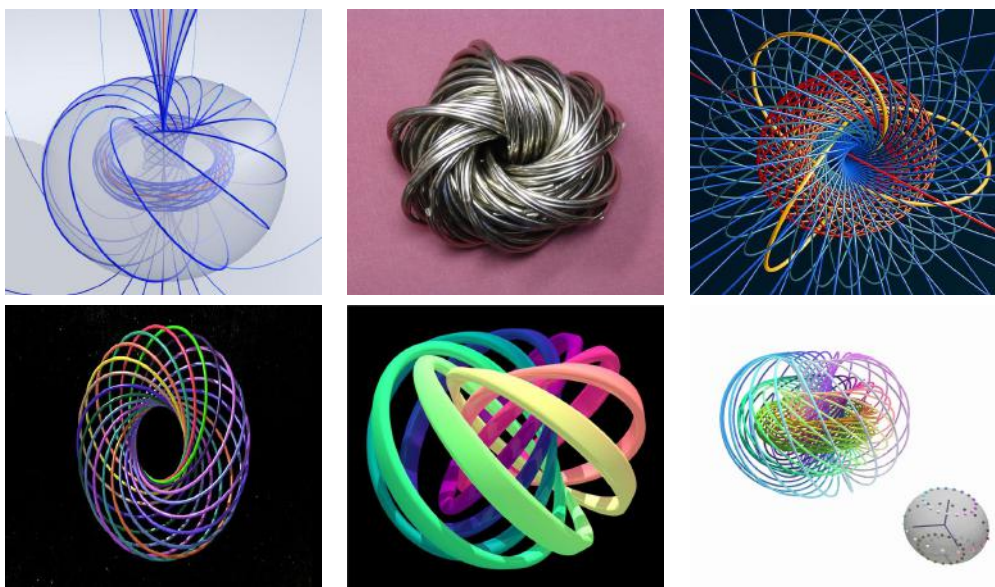
*Esse ‘mergulho’ do plano projetivo em  $\mathbb{R}^6$  realiza o conhecido mergulho de Veronese. O último é uma ferramenta recorrente em escolas clássicas de geometria algébrica e se mostra muito importante. Geometricamente (através de propriedades de  $\pi$ ) podemos mostrar que o mergulho que construímos preserva geodésicas, tornando o plano projetivo localmente redondo.*

## Capítulo 4

# A fibração de Hopf

Uma das coisas mais belas na geometria atual é que ela não é feita apenas de espaços, mas também das relações entre eles. Essas relações são realizadas através de aplicações entre espaços, sendo a aplicação  $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow SO(3)$  um exemplo.

Uma das aplicações mais fundamentais e influentes em geometria é a *aplicação de Hopf*,  $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Ela ‘divide’ a esfera de dimensão 3 por grandes círculos, tendo como resultado a esfera de dimensão 2<sup>1</sup>. Além desse fato impressionante, o posicionamento de tais círculos ao longo da esfera é inesperado:



Como pode-se observar, qualquer par desses círculos estão entrelaçados entre si. Essa propriedade torna essa aplicação *homotopicamente não-trivial*, isto é, não há uma deformação contínua dessa aplicação que faça com que sua imagem se limite a um ponto - em realidade, não há deformação contínua que faça com que essa aplicação deixe de ser sobrejetiva!

<sup>1</sup>Por dividir, entende-se exatamente a divisão de números:  $10/5 = 2$ ,  $4/2 = 2, \dots$ ,  $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^2$

Nessas notas, tentaremos introduzir essa aplicação da forma mais construtiva possível, utilizando o grupo  $SO(3)$ .

### 4.0.1 Parametrizando $SO(3)$ sobre $S^2$

O espaço  $SO(3)$  goza de uma interpretação interessante a partir de propriedades que já verificamos.

Considere uma matriz em  $SO(3)$  como um conjunto de três vetores ordenados  $A = (A_1 A_2 A_3)$ . O Lema 1 nos garante que

1.  $\|A_i\| = 1$ ,
2. se  $i \neq j$ ,  $\langle A_i, A_j \rangle = 0$ ,
3. a tripla  $A_1, A_2, A_3$  forma uma base orientada de  $\mathbb{R}^3$ .

As últimas três instâncias podem ser redigidas na seguinte forma:

**Lema 9.** *Uma matriz  $A = (A_1 A_2 A_3)$  pertence a  $SO(3)$  se e somente se:*

1. *O vetor  $A_1$  pertence a esfera unitária de  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^2$ ;*
2. *O vetor  $A_2$  é um vetor unitário, tangente a esfera  $S^2$  no ponto  $A_1$ ;*
3. *O vetor  $A_3$  é completamente definido a partir de  $A_1$  e  $A_2$ :  $A_3 = A_1 \times A_2$ .*

*Demonstração.* O item 1 é facilmente verificado. O item dois se verifica pelo fato do espaço tangente a  $S^2$  no ponto  $A_1$  ser exatamente o conjunto dos vetores ortogonais a  $A_1$ . O autor sugere ao leitor demonstrar o terceiro item, através do seguinte exercício. □

**Exercício 34.** *Mostre que, se  $u, v \in \mathbb{R}^3$  são linearmente independentes, então  $w = u \times v$  é o único vetor que satisfaz os seguintes quesitos:  $w$  é ortogonal a ambos  $u$  e  $v$ ;  $\|w\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$ , onde  $\alpha$  é o ângulo entre  $u$  e  $v$ ; a tripla  $u, v, w$  é uma base orientada de  $\mathbb{R}^3$ .*

Essas propriedades fornecem uma aplicação bastante interessante:

$$pr : SO(3) \rightarrow S^2 \tag{4.1}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} .$$

Isto é,  $pr(A)$  é a primeira coluna de  $A$ ,  $pr(A_1 A_2 A_3) = A_1$ . Assim podemos facilmente definir a aplicação de Hopf:

$$h : S^3 \rightarrow S^2 \tag{4.2}$$

$$q \mapsto pr(T_q)$$

Ou, lembrando que a primeira coluna de uma matriz é a imagem dela pelo primeiro vetor da base:

**Proposição 7.**  $h(q) = qi\bar{q}$ .

*Demonstração.* Segundo a nossa notação, a base de  $\mathbb{R}^3$  é exatamente  $\{i, j, k\}$ . Portanto

$$pr(T_q) = T_q(i) = qi\bar{q}.$$

□

A partir dessa proposição, vemos facilmente que para todo  $\theta$ ,  $h(qe^{\theta i}) = h(q)$ . Em realidade, o conjunto

$$\mathbb{S}_q^1 = \{qe^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$$

é um grande círculo. Portanto, se  $x \in \mathbb{S}^2$ , o conjunto de pontos que  $h$  leva para  $x$ ,  $h^{-1}(x)$ , contém um grande círculo. Vamos ver que tal conjunto é exatamente  $\mathbb{S}_q^1$ .

**Proposição 8.** Se  $h(q) = h(w)$ , então existe  $\theta \in [0, 2\pi)$  tal que  $w = qe^{\theta i}$ .

**Exercício 35.** Dado  $q \in \mathbb{S}^3$ , mostre que  $qi = iq$  se e somente se  $q \in \mathbb{C}$ , isto é,  $q = \alpha + \beta i$ .

**Exercício 36.** Use o modelo descrito na seção 3.4 para mostrar que os círculos  $h^{-1}(-k)$  e  $h^{-1}(i)$  são entrelaçados.



## Referências Bibliográficas

- [1] NABER, G. *Topology, Geometry and Gauge fields: Foundations*. Springer, 2011.
- [2] RIGAS, *Grupos de Lie via Exemplos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1993.
- [3] SPERANÇA, L. An identification of the Dirac operator with the parity operator. *International Journal of Modern Physics D*, v. 23, p. 1444003, 2014.
- [4] Weyl, H. *Symmetry*. Princeton University Press, 1952.