Minicurso – Colóquio de Matemática da Região Norte 2014

Comitê Científico

Esta é mais uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática para os minicursos ministrados nos Colóquios.

Os autores que submeterem propostas de minicursos devem estar cientes de que o texto deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7), as figuras em eps**.

O texto deve ser redigido de forma clara e recomendamos a inclusão de **exercícios** para a verificação de aprendizagem, ao final de cada capítulo.

Veja outras publicações da SBM, na livraria virutal que se encontra na página

http://www.loja.sbm.org.br/

Sociedade Brasileira de Matemática

2014

Introdução à Álgebra Geométrica

Cicero Mota
mota@ufam.edu.br
Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas
Universidade Federal do Amazonas

Marcus Marrocos
marcus.marrocos@ufabc.edu.br
CMCC
Universidade Federal do ABC

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Sociedade Brasileira de Matemática

Rio de Janeiro - RJ, Brasil
2014

Coordenação Editorial:

Editora: SBM

Impresso na Gráfica:

Capa: ? ? ?

Patrocínio: SBM

Catalogação elaborada pela Biblioteca ???
Bibliotecária: ????

Mota, Cicero
Marrocos, Marcus
Introdução à álgebra geométrica – Rio de Janeiro, RJ :
SBM, 2014, ?? p., 20.5 cm - (Minicurso Colóquio Norte 2014; v. ??)

ISSN ????-????

1. Geometria Analítica. 2. Álgebra de Clifford. 3. Álgebra Geométrica. I. Mota, Cicero. II. Marrocos, Marcus. III. Título. IV. Série.

CDD - 51

Ao professor Waldner de Menezes Caldas.

Agradecimentos

Várias pessoas contribuíram para que estas notas se tornassem realidade, a todas, nossos sinceros agradecimentos. Em especial, o segundo autor agradece sua amada esposa Roberta por aceitar sua ausência durante semanas, com carinho e paciência, e pela motivação e coragem oferecidas nos momentos mais árduos da preparação deste texto. O primeiro autor agradece sua família pelo firme apoio e renúncia às muitas horas de convivência perdidas para o trabalho de elaboração do texto e à prof. Marta Gusmão, vice-diretora do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal do Amazonas, que numerosas vezes, generosamente, o substituiu em suas obrigações administrativas. O primeiro autor agradece também o suporte financeiro do CNPq e da FAPEAM, por meio do Programa de Apoio a Núcleos de Excelência (PRONEX), projeto Geometria das Imersões Isométricas. Finalmente, agradecemos aos organizadores do Colóquio de Matemática da Região Norte pela oportunidade de apresentar este trabalho e pela paciência no que diz respeito aos prazos para a entrega destas notas.

...

O retângulo em si mesmo é o verdadeiro produto geométrico e sua construção é realmente multiplicação geométrica.

...

Justus G. Grassmann, 1824.

Conteúdo

Prefácio

A Álgebra Geométrica fornece uma linguagem algébrica que permite exprimir de forma concisa, unificada e abrangente algumas propriedades dos espaços euclidianos, especialmente as que envolvem conceitos lineares ubíquos como pontos, retas e planos.

A introdução de coordenadas no espaço euclidiano é reconhecidamente um dos grandes avanços em Matemática, pois permite que se utilize os métodos da Álgebra para resolver problemas de geometria. Entretanto, frequentemente algumas propriedades geométricas ficam sombreadas pelas longas equações que as descrevem, dificultando o entendimento da matéria por alunos ainda inexperientes. Ao eliminar quase completamente o uso de coordenadas, a Álgebra Geométrica permite a representação algébrica de propriedades geométricas de forma muito sintética e elegante, levando frequentemente a uma entendimento mais claro do assunto pelos alunos. Tome-se como exemplo a forma natural com que os números complexos surgem nesse contexto. Complementarmente, muitos conceitos nas ciências são descritos por conceitos originados na geometria. Por exemplo, na Física, força, velocidade e aceleração são representadas por vetores. A Álgebra Geométrica permite apresentar esses conceitos de forma mais intuitiva e natural.

Os princípios da Álgebra Geométrica foram introduzidos por Hermann G. Grassmann em 1844 e 1862 sob o nome de Teoria da Extensão (*Ausdehnungslehre*). O nome Álgebra Geométrica foi introduzido por William K. Clifford no artigo *Applications of Grassmann's Extensive Algebra* (Clifford, 1882, p. 266). A obra matemática de Grassmann, cuja apresentação original é surpreendentemente moderna, foi inicialmente negligenciada pela comunidade matemática e embora tenha inspirado matemáticos de renome como Hermann Hankel, Giuseppe Peano, Alfred N. Whitehead, Felix C.Klein e Élie Cartan, além de ser utilizada em muitas aplicações em outras ciências e nas tecnologias, continua sendo uma matéria de especialistas, distante das disciplinas matemáticas básicas dos cursos de ciências exatas. Atualmente, há um grande número de cientistas, entre os quais se destaca o físico americano David Hestenes, que propõem uma exposição mais imediata desse teoria ao futuro cientista, professor ou engenheiro. Essas notas são uma pequena contribuição a esse esforço coletivo de divulgação.

Em nível elementar, pode-se introduzir os conceitos de Álgebra Geométrica de duas maneiras. Na primeira, a partir dos axiomas de geometria euclidiana, constroem-se os conceitos fundamentais da teoria a partir dos conceitos geométricos de ponto, segmento, paralelogramo e paralelepípedo. Na segunda, apresentam-se os conceitos da álgebra de forma axiomática, seguidos de uma interpretação baseada nos conceitos de geometria. A primeira forma é mais intuitiva, mas limitada ao espaço tridimensional. A segunda não possui restrição de dimensão, mas pode apresentar maior dificuldade de compreensão ao leitor menos acostumado com esse tipo de abordagem. Embora ambas as abordagens tenham origem axiomática, a primeira possui uma referência no mundo cotidiano, por essa razão, optamos por ela.

Os pré-requisitos para ler estas notas são mínimos, resumem-se a conhecimento rudimentares de Geometria Euclidiana ao nível do Ensino Médio. O leitor interessado em uma apresentação elementar, porém sistemática, de Geometria Euclidiana pode consultar Barbosa (1994). Para as aplicações é necessário algum conhecimento de Cálculo.

Manaus, 22 de setembro de 2014.

Cicero Mota e Marcus Marrocos

Capítulo 1

Vetores

Neste capítulo apresentaremos a construção de uma estrutura algébrica chamada *espaço vetorial* a partir da noção de espaço geométrico idealizada axiomaticamente por Euclides ($\sim$ 300 AC) em sua obra *Os Elementos*. A coleção de axiomas aqui utilizada pode ser consultada em *Geometria Euclidiana Plana*, Barbosa (1994). O espaço vetorial anunciado é construído naturalmente a partir da geometria euclidiana por meio de segmentos orientados. Existe uma literatura ampla sobre essa construção, dos Santos (1970) e de Camargo e Boulos (2005), por isso, nos limitaremos a enunciar as principais definições e resultados sem contudo apresentar todas as demonstrações.

1.1 Relação de Equivalência

A compreensão do conceito de relação de equivalência é fundamental na construção dos principais objetos geométricos destas notas, por isso dedicaremos algum esforço em apresentá-lo, embora de forma resumida, intuitiva e por meio de alguns exemplos simples. A discussão será informal e tem o intuito de transmitir uma ideia que ocorre em todos os níveis da Matemática. Assumiremos para esta seção que o leitor está familiarizado com a linguagem da teoria de conjuntos.

Iniciaremos nossa discussão com a seguinte situação hipotética. Imagine que um professor de matemática em uma sala com diversos alunos deseja iniciar um estudo sobre propriedades métricas de triângulos. Então, ele desenha um triângulo cujos lados medem 3 , 4 e 5 no quadro negro e solicita que os alunos façam o mesmo em seus cadernos. É claro que teremos triângulos desenhados em lugares diferentes e portanto todos distintos, porém, todos eles conservando as medidas de seus lados e, consequentemente, de seus ângulos correspondentes. Dessa forma, todas as relações métricas, por exemplo área, medida das alturas relativas, perímetro e muitas outras, obtidas pelo professor em seu triângulo desenhado no quadro negro serão válidas para os triângulos desenhados pelos alunos. Conclusão: se considerarmos o conjunto formado por todos os triângulos do espaço podemos formar um subconjunto com aqueles cujas medidas dos lados são, 3 , 4 e 5 e tudo que for dito sobre outras medidas para um desses triângulos será válida para todos os outros no mesmo subconjunto.

Seguindo essa linha de raciocínio, podemos concluir que, do ponto de vista métrico, dois triângulos para os quais é possível estabelecer uma correspondência entre os lados de tal modo que lados correspondentes possuem as mesmas medidas, isto é, *congruêntes*, são idênticos. Portanto, podemos particionar o conjunto de todos os triângulos em subconjuntos de tal modo que cada um desses subconjuntos agrega os triângulos congruentes. Assim, para estudarmos características métricas dos triângulos basta considerar um único deles em cada um desses subconjuntos.

Vejamos o que podemos abstrair da situação descrita acima. Consideramos o conjunto T formado por todos os triângulos do espaço. Escolhemos uma característica dos triângulos – nesse caso, as medidas dos lados – e passamos a relacioná-los. Fixaremos uma notação para indicar quanto dois entre eles se relacionam: para Δ_1, $\Delta_2 \in T$ indicaremos por $\Delta_1 \sim \Delta_2$ se e somente se existe uma correspondência entre os lados dos triângulos Δ_1 e Δ_2 de tal modo que lados correspondentes têm as mesmas medidas, isto é, $\sim$ indica a congruência de triângulos. Como foi definida a partir da igualdade das medidas de lados correspondentes, a relação $\sim$ herda as propriedades da igualdade, a saber, reflexividade, simetria e transitividade. Por isso, dizemos que a congruência de triângulos é uma *relação de equivalência* e, se $\Delta_1 \sim \Delta_2$, dizemos que Δ_1 é equivalente a Δ_2 . Para cada Δ_1 em T define-se o conjunto $\overline{\Delta_1} = \{\Delta \in T : \Delta \sim \Delta_1\}$, que é chamado de classe de equivalência de Δ_1, ou seja, $\overline{\Delta_1}$ é formada por todos os elementos do conjunto T que são equivalentes a Δ_1. O conjunto de todas as classes de equivalência é chamado de *conjunto quociente*. É claro, a partir da forma como definimos a relação $\sim$, que duas classes de equivalência de triângulos são ou iguais ou são disjuntas. Mais ainda, os triângulos em cada classe de equivalência são essencialmente os mesmos.

O principal objetivo da construção de uma relação de equivalência em um conjunto é agrupar em classes os elementos que têm as mesmas caraterísticas, escolhidas a priori, de forma que cada classe seja representada por um de seus elementos. A definição precisa é

Definição 1.1. *Seja A um conjunto, uma relação $\sim$ em A é uma relação* *de equivalência se goza das propriedades:*

Reflexiva *Para todo* $a \in A$, $a \sim a$;

Simétrica *Se* $a \sim b$, *então* $b \sim a$;.

Transitiva *Se* $a \sim b$ *e* $b \sim c$, *então* $a \sim c$.

A reflexividade tem o propósito de garantir que a classe de equivalência de cada elemento do conjunto é não vazia. Já a simetria e a transitividade garantem, como veremos abaixo, que as classes ou são iguais ou disjuntas. Isso é suficiente para garantir que cada elemento de uma classe a determine.

Proposição 1.1. *Seja* $\sim$ *uma relação de equivalência em um conjunto* A. *Para cada* $x \in A$, *indique por* $\overline{x}$ *a classe de equivalência de* x, *então* $a \sim b$ *se e somente se* $\overline{a} = \overline{b}$. *Além disso,* $\overline{a}$ *e* $\overline{b}$ *ou são disjuntas ou são iguais.*

A prova é relativamente simples e segue das três propriedades que definem uma relação de equivalência. Se as classes de a e b são iguais segue imediatamente que o elemento a pertence a classe de equivalência de b e por definição $a \sim b$. Agora se $a \sim b$ então todo elemento da classe de equivalência de a está relacionado com o próprio a e por transitividade também estará relacionado com b, logo a classe de equivalência de a está contida na classe de b. Usando a simetria para observar que $b \sim a$, a inclusão contrária segue da mesma forma. Para provarmos a segunda afirmação da proposição suponha que $c \in \overline{a} \cap \overline{b}$. Nesse caso $c \sim a$ e $c \sim b$, segue da simetria que $a \sim c$ e assim, pela transitividade, $a \sim b$. Portanto $\overline{a} = \overline{b}$.

Exemplo 1.1. *Paralelismo.* Considere o conjunto R de todas as retas do espaço. Dizemos que duas retas são paralelas quando não se cruzam e existe um plano que as contenha. Essa definição não torna o paralelismo de retas uma relação de equivalência em R, pois não satisfaz a propriedade de reflexividade. Contudo, podemos definir a relação de equivalência incluindo o caso de as retas serem coincidentes. Neste caso, $\mathbf{r} \sim s \iff \mathbf{r} \parallel \mathbf{s}$ ou $\mathbf{r} = \mathbf{s}$. As propriedades de reflexividade e simetria seguem facilmente, vamos verificar a transitividade. Suponha $\mathbf{r} \sim \mathbf{s}$ e $\mathbf{s} \sim \mathbf{t}$. Se $\mathbf{r} = \mathbf{s}$ o resultado é óbvio. Se as três retas estão em um mesmo plano o resultado segue imediatamente do axioma das paralelas. Considere agora o caso em que as três retas são não coplanares. Sejam P um ponto qualquer na reta $\mathbf{t}$, $\boldsymbol{\alpha}$ o plano determinado por $\mathbf{r}$ e o ponto P, $\boldsymbol{\beta}$ o plano determinado pelas retas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$, e $\boldsymbol{\gamma}$ o plano determinado pelas retas $\mathbf{s}$ e $\mathbf{t}$. Note que $P \in \boldsymbol{\alpha} \cap \boldsymbol{\gamma}$, portanto, existe uma reta $\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \cap \boldsymbol{\gamma}$. Podemos concluir a partir daí que $\mathbf{x} \parallel \mathbf{r}$ e $\mathbf{x} \parallel \mathbf{s}$, pois $\boldsymbol{\beta} \cap \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{s}$ e $\mathbf{s}$ não intercepta o plano $\boldsymbol{\alpha}$. Segue-se que as retas $\mathbf{t}$ e $\mathbf{x}$ são paralelas à reta $\mathbf{s}$ passando pelo ponto P. Logo, $\mathbf{x} = \mathbf{t}$ e, consequentemente, $\mathbf{r} \parallel \mathbf{t}$.

Exemplo 1.2. *Magnitude de segmentos de retas.* Considere o conjunto de todos os segmentos de reta no espaço. Para dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, diremos que $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ se e somente se eles têm o mesmo comprimento. Como estamos relacionando dois segmentos por meio do seu comprimento e, claramente, a relação de igualdade satisfaz as três propriedades que definem uma relação de equivalência, então, a relação acima é uma relação de equivalência.

Exemplo 1.3. *Congruência de ângulos.* Considere o conjunto A de todos os ângulos. Para dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$, diremos que $\hat{A} \sim \hat{B}$ se eles têm a mesma medida. Mais uma vez, estamos usando uma relação de igualdade para definir a relação entre os objetos, portanto, $\sim$ é uma relação de equivalência.

Exemplo 1.4. *Ortogonalidade.* Este é um exemplo de uma relação entre retas que não é uma relação de equivalência. De fato, uma reta não pode ser ortogonal a si mesma.

1.2 Segmentos Orientados.

Indicaremos o *espaço euclidiano* pela letra E. Um *segmento orientado* é um segmento para o qual se escolheu uma ordem (ou um rótulo) para suas extremidades. Se o segmento tem como extremidades os pontos A e B, podemos rotular A como *ponto inicial* e B como *ponto final.* Portanto, há duas possibilidades para orientar um segmento. Indicaremos por AB o segmento orientado de ponto inicial A e ponto final B para enfatizar sua orientação. O segmento – não orientado – com as mesmas extremidades será indicado por $\overline{AB}$. A notação de segmento orientado coloca em evidência o fato $AB \neq BA$ em oposição a igualde de segmentos $\overline{AB} = \overline{BA}$. O segmento orientado BA será chamado de *segmento oposto* a AB. Para qualquer ponto A do espaço E, AA será chamado de *segmento nulo.*

Adição de segmentos orientados. Dois segmentos orientados AB e BC determinam um novo segmento orientado AC. Definimos $AB + BC := AC$. Note que o ponto final do primeiro segmento orientado deve coincidir com o ponto inicial do segundo, Figura 1.1. A adição de segmentos orientados goza da propriedade associativa: se AB, BC e CD são segmentos orientados, então

$$\begin{aligned} AD &= (AB + BC) + CD \\ &= AB + (BC + CD)\,. \end{aligned}$$

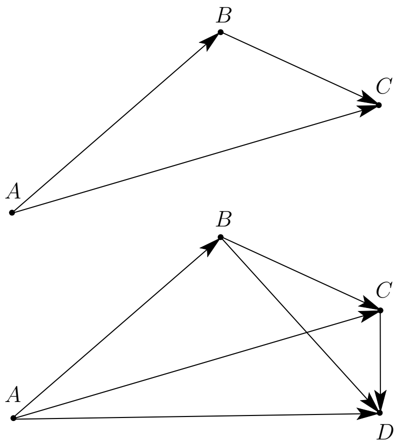

Figura 1.1: Adição de dois segmentos orientados e propriedade associativa.

Módulo ou comprimento. O *módulo* ou *comprimento do segmento orientado* AB, indicado por $|AB|$, é o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

Produto de número real por segmento orientado. Dados um número real α um segmento orientado AB, não-nulo, existem na reta suporte de AB dois pontos, B' e B'', em que o primeiro está localizado na semi-reta determinada por AB de origem A que contém B e o segundo está localizado na semi-reta de origem A que não contém B e tais que $|AB'| = |\alpha||AB| = |AB''|$. Se $\alpha \geq 0$, define-se $\alpha AB := AB'$, caso contrário, $\alpha AB := AB''$. Se $\alpha = 0$, define-se $\alpha AB := AA$.

O produto de número real por segmento orientado goza das propriedades:

$$|\alpha AB| = |\alpha||AB|$$

e

$$\alpha(\beta AB) = (\alpha\beta)AB\,.$$

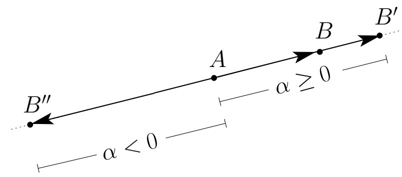

Figura 1.2: Produto de um número real por um segmento orientado.

O conjunto dos segmentos orientados, com a operação de adição e produto por número real acima definidos, ainda não é a estrutura algébrica que procuramos, uma vez que não podemos adicionar dois segmentos orientados quaisquer. Para isso, teremos que desistir da localização espacial dos segmentos orientados, preservando-lhes as principais características: *comprimento, direção* e *sentido*, cujas definições concluiremos a seguir.

Direção. Se AB e CD são segmentos orientados não-nulos, dizemos que eles possuem a mesma *direção* – ou são *paralelos* – quando as retas que os suportam são paralelas ou coincidentes.

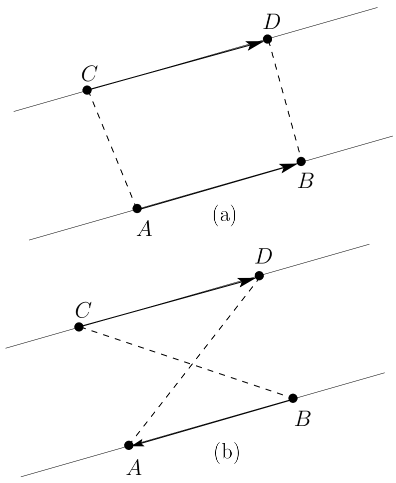

Figura 1.3: Segmentos orientados de mesmo sentido (a) e sentidos contrários (b).

Sentido. Sejam AB e CD segmentos orientados não-nulos com a mesma direção. Se eles têm retas suportes distintas, dizemos que eles têm o mesmo *sentido* – ou mesma *orientação* – quando os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ não se interceptam, caso contrário, dizemos que têm sentidos opostos, Figura 1.3. Caso os segmentos orientados possuam a mesma reta suporte, digamos $\mathbf{r}$, sejam A' um ponto fora dela e $\mathbf{s}$ a reta paralela a $\mathbf{r}$ passando por A'. Em $\mathbf{s}$, tome outro ponto B' tal que o segmento orientado $A'B'$ tenha o mesmo sentido de AB. Nesse caso, se $A'B'$ tem o mesmo sentido de CD, dizemos que AB e CD têm o mesmo sentido, caso contrário, dizemos quem têm sentidos opostos.

A partir dessas definições preliminares, podemos definir uma relação de equivalência no conjunto de todos os segmentos orientados do espaço E, identificando aqueles de mesmo comprimento, direção e sentido. Mais precisamente:

Equipolência. Dizemos que os segmentos orientados AB e CD são *equipolentes* quando são ambos nulos ou, caso contrário, quando ambos possuem o mesmo comprimento, sentido e direção. Indicaremos a equipolência de dois segmentos por $AB \sim CD$.

A relação de equipolência é uma relação de equivalência no conjunto dos segmentos orientados, isto é, goza das seguintes propriedades:

Reflexividade: $AB \sim AB$;

Comutatividade: $AB \sim CD \implies CD \sim AB$;

Transitividade: $AB \sim CD$ e $CD \sim EF \implies AB \sim EF$.

A classe de equivalência do segmento orientado AB, isto é, o conjunto formado por todos os segmentos orientados equipolentes a AB, será indicada por $\overrightarrow{AB}$. Os elementos de uma classe de equivalência são chamados *representantes* da classe, assim o segmento orientado AB é um representante de

$\overrightarrow{AB}$. Uma propriedade importante das classes de equivalência, vista na seção anterior, é que duas classes de equivalência são iguais ou não se interceptam. Assim, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se e somente se AB é equipolente a CD.

1.3 Vetores.

Cada classe de equivalência definida pela relação de equipolência será chamada de *vetor*. Quando não for necessário enfatizar um determinado representante de um vetor, usaremos uma letra romana em negrito para representá-lo, por exemplo $\mathbf{v}$. A classe de equivalência dos segmentos orientados nulos será chamada de *vetor nulo* ou *zero* e será indicada por 0, isto é, $0 = \overrightarrow{AA}$. O conjunto de todos os vetores será indicado por V.

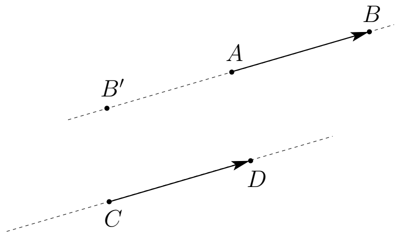

Figura 1.4: Transporte paralelo de um vetor: dado um vetor $\mathbf{v}$ e um ponto A, existe um represente de $\mathbf{v}$ com origem em A.

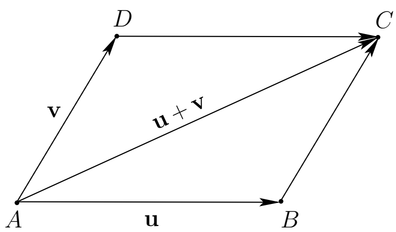

Figura 1.5: Regra do paralelogramo e comutatividade da adição de vetores.

Adição de vetores. A seguir definiremos adição de vetores. Para isso precisamos do *lema do transporte paralelo de vetores*: dados um vetor $\mathbf{v} \in V$ e um ponto $A \in E$ quaisquer, existe um único representante de $\mathbf{v}$ com origem em A. De fato, se $\mathbf{v} \neq 0$, seja CD um representante qualquer de $\mathbf{v}$ com reta suporte $\mathbf{s}$, Figura 1.4. Seja $\mathbf{r}$ a reta paralela a $\mathbf{s}$, contendo A. Sejam B e B' pontos em cada um das semi-retas de $\mathbf{r}$ determinadas por A tais que $|AB| = |AB'| = |CD|$. Então $AB \sim CD$ ou $AB' \sim CD$, ou equivalentemente, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ ou $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB'}$.

Dados dois vetores quaisquer $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, definimos $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ da seguinte forma: considere AB um representante qualquer de $\mathbf{u}$ e BC o único representante de $\mathbf{v}$ com origem em B, então

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} := \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB + BC}\,.$$

A demonstração de que a adição de vetores está bem definida é deixada a cargo do leitor. A adição de vetores herda a propriedade associativa da adição de segmentos orientados. Podemos também obter a soma de dois vetores a partir de representantes cujo os pontos iniciais coincidam, Figura 1.5. Isto é, na verdade, a regra do paralelogramo para soma de vetores, que enunciamos a seguir.

Regra do paralelogramo. Sejam AB e AC segmentos orientados representantes dos vetores não-paralelos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, respectivamente. Então existe um único ponto D em E que torna o quadrilátero $ABDC$ um paralelogramo. Além disso, AD é um representante da soma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Uma consequência imediata da regra do paralelogramo é a comutatividade da soma de vetores.

A adição de vetores tem as seguintes propriedades: para todos os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ valem:

A1 *Associatividade:* $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$;

A2 *Comutatividade:* $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;

A3 *Elemento neutro:* O vetor nulo é tal que $\mathbf{u} + 0 = 0 + \mathbf{u} = \mathbf{u}$;

A4 *Elemento oposto:* Se $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, então, o vetor $\underline{\mathbf{u}} := \overrightarrow{BA}$ é tal que $\mathbf{u} + \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}} + \mathbf{u} = 0$.

Por razões que ficarão mais clara a seguir, indicaremos o oposto do vetor $\mathbf{u}$ por $-\mathbf{u}$.

Produto de número real por vetor. Por fim, descreveremos como deve ser interpretado a multiplicação de um número real por um vetor: se α é um número e $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ é um vetor, define-se

$$\alpha\mathbf{u} := \overrightarrow{\alpha AB}.$$

O produto de uma número real por um vetor goza da seguintes propriedades, que enunciamos sem demonstração: para todos os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e números reais α, β valem:

M1 $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$;

M2 $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$;

M3 $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$;

M4 $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u})$.

Agora passaremos a descrever algumas relações entre vetores que refletem propriedades geométricas dos segmentos orientados que os representam. Começaremos definindo *norma, direção e sentido de vetores.*

Norma, direção e sentido de vetores. Os vetores herdam as noções de comprimento, direção e sentido de seus representantes: (1) o *comprimento, módulo* ou *norma* de $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ é definido por $\|\mathbf{u}\| := |AB|$; (2) se $\mathbf{v} = \overrightarrow{CD}$, e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são não-nulos, então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ têm a mesma *direção* se seus representantes AB e CD estão em retas paralelas ou coincidentes; e (3) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores de mesma direção, eles têm os mesmo *sentido* se seus representantes AB e CD tem o mesmo sentido. A relação de equipolência garante que as noções de direção e sentido para vetores estão bem definidas. Dizemos que $\mathbf{u}$ é *unitário* se $\|\mathbf{u}\| = 1$.

O produto por número real permite caracterizar algebricamente as noções de direção e sentido de vetores: $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ têm a mesma direção se e somente se eles possuem representantes não-nulos sobre uma mesma reta se e somente se existe um número real $\alpha \neq 0$ tal que $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$. Além disso, $\alpha > 0$ se e somente se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ têm o mesmo sentido, equivalentemente, $\alpha < 0$ se e somente eles têm sentido oposto.

Com a definição de norma, podemos descrever melhor a ação dos números reais no conjunto dos vetores: a interpretação geométrica para o produto do número positivo α pelo vetor $\mathbf{u}$ é de uma dilatação ou uma compressão da norma do vetor $\mathbf{u}$ mantendo a sua direção e sentido. Já para os números reais negativos, primeiro devemos definir a ação de -1. Desse modo, $-1\mathbf{u}$ é igual ao oposto do vetor $\mathbf{u}$, ou seja, $-1\mathbf{u} = -\mathbf{u}$. Geometricamente essa multiplicação é uma inversão no sentido do vetor $\mathbf{u}$. Então, para números reais α negativos temos que $\alpha\mathbf{u} = |\alpha|(-\mathbf{u})$, ou seja, o produto é uma inversão de sentido, seguida de uma dilatação ou compressão do vetor $\mathbf{u}$ pelo fator $|\alpha|$. Finalmente, $0\mathbf{u} = 0$.

Paralelismo e ortogonalidade de vetores. Dizemos que dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são *paralelos* ou *colineares* e escrevemos $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$, quando um representante de $\mathbf{u}$ é paralelo a algum representante de $\mathbf{v}$. Quaisquer dois representantes de um vetor são paralelos entre si, logo a noção de paralelismo não depende dos representantes considerados. Dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são *ortogonais* – representado por $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ – quando um representante de $\mathbf{u}$ é ortogonal a algum representante de $\mathbf{v}$. Como todos os representantes de $\mathbf{v}$ são paralelos entre si, se um representante AB de $\mathbf{u}$ é ortogonal a algum representante de $\mathbf{v}$ então ele é ortogonal a todos os representantes de $\mathbf{v}$, implicando que a definição de ortogonalidade de vetores está bem definida. Considera-se o vetor nulo paralelo e ortogonal a qualquer outro vetor, por definição.

As noções de paralelismo e direção de vetores diferem apenas pela admissão do vetor nulo na definição de paralelismo. O produto de número real por vetor pode ser usado para caracterizar algebricamente o fato de dois vetores serem paralelos: dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são paralelos se, somente se existe um número real α tal que $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$ ou $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$. Com efeito, considere dois vetores não-nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ paralelos. Então eles têm a mesma direção e, portanto, existe um número real α tal que $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$. Se um deles é nulo, o resultado é imediado com $\alpha = 0$.

A estrutura algébrica introduzida até aqui não é apropriada para caracterizar algebricamente a ortogonalidade de vetores. Isso será feito na última seção deste capítulo.

Caracterização do produto por número real. As propriedades a seguir caracterizam o produto de um número real α por um vetor $\mathbf{u}$:

a) $\alpha\mathbf{u} = 0$ se e somente se $\alpha = 0$ ou $\mathbf{u} = 0$;

b) $\alpha\mathbf{u}$ é paralelo a $\mathbf{u}$;

c) $\alpha\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}$ têm o mesmo sentido se $\alpha > 0$ e sentidos contrário se $\alpha < 0$;

d) $\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha|\|\mathbf{u}\|$;

Espaços vetoriais. Um conjunto munido de uma operação de adição e uma operação de produto por número real que tenham as propriedades **A1** a **A4** e **M1** a **M4** é chamado de *espaço vetorial.* Desse modo, o conjunto do vetores munido das operações de adição e produto por número real acima apresentados é um espaço vetorial. Nestas notas consideraremos vários espaços vetoriais, dos quais o espaço vetorial V pode ser considerado um protótipo. Abaixo segue outro exemplo de espaço vetorial importante para cálculos numéricos.

Exemplo 1.5. Considere o conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ munido com as seguintes operações de soma e multiplicação por número real:

a) $(x, y, z) + (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) := (x + \overline{x}, y + \overline{y}, z + \overline{z})\,;$

b) $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)\,.$

O conjunto $\mathbb{R}^3$ munido destas operações tem estrutura de espaço vetorial. A verificação das propriedades **A1** a **A4** e **M1** a **M4** seguem facilmente das propriedades da soma e produto de números reais. Veremos adiante que este espaço vetorial está fortemente relacionado com o que foi construído nesta seção.

1.4 Vetores e Geometria

Utilizaremos os elementos do espaço vetorial V para representar algebricamente objetos geométricos tais como retas e planos, círculos, polígonos. De fato, o objetivo central de toda a construção feita é representar algebricamente objetos geométricos e, a partir daí, obter resultados de geometria por meio de manipulações algébricas. Como veremos nos exemplos a seguir, as noções de adição e produto por número real de segmentos orientados, apresentadas de forma vetorial, são uma ferramenta poderosa para se demonstrar resultados geométricos.

Exemplo 1.6. Os lados de um triângulo ABC são representados pelos vetores $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{CA}$; esses vetores são não-paralelos e satisfazem a igualdade

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = 0 \,. \tag{1.1}$$

Reciprocamente, três vetores não-paralelos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ que satisfazem a Equação (1.1) determinam um triângulo.

Exemplo 1.7. *O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e mede metade deste.* Seja ABC um triângulo e sejam D e E os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. De fato, temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}\\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= 2\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{AC} &= 2\overrightarrow{AE}\,.\end{aligned}$$

Substituindo as duas últimas equações na segunda obtemos $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{ED}\,.$

Exemplo 1.8. *As diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio.* De fato, seja $ABCD$ um paralelogramo e M o ponto de intersecção das diagonais. Então,

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC}\,.$$

Logo,

$$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{MB}$$

mas os vetores no primeiro membro da equação acima possuem representantes na reta determinada pela diagonal $\overline{AC}$, enquanto os vetores no segundo membro possuem representantes na reta determinada por $\overline{DB}$. Como essas retas não são paralelas, os membros da igualdade são nulos. Portanto,

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MB}\,.$$

Exemplo 1.9. *As medianas dos lados de um triângulo se cruzam em um único ponto que as divide na proporção de 2 para 1.* Considere um triângulo ABC e M_{AB}, M_{BC} e M_{CB} os pontos médios dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{CA}$ respectivamente. Seja G o ponto de cruzamento dos segmentos $\overline{BM_{CA}}$ e $\overline{CM_{AB}}$. Basta mostrarmos que $\overrightarrow{AM_{BC}} = \alpha\,\overrightarrow{GM_{BC}}$. Com o auxílio do exemplo anterior temos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM_{BC}} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
\overrightarrow{BM_{CA}} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
\overrightarrow{CM_{AB}} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}
\end{aligned}$$

Além disso, existem números reais β, γ tais que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BG} &= \beta\,\overrightarrow{BM_{CA}} \\
\overrightarrow{CG} &= \gamma\,\overrightarrow{CM_{AB}}\,.
\end{aligned}$$

Primeiro mostraremos que $\beta = \gamma = \dfrac{2}{3}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} \\
&= \overrightarrow{AB} + \gamma\,\overrightarrow{BM_{CA}} \\
&= \overrightarrow{AB} + \gamma\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) \\
&= \overrightarrow{AB} + \gamma\Big[-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\big(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\big)\Big] \\
&= (1-\gamma)\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} \\
&= \overrightarrow{AC} + \beta\,\overrightarrow{CM_{AB}} \\
&= \overrightarrow{AC} + \beta\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) \\
&= \overrightarrow{AC} + \beta\Big[-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\Big(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\Big)\Big] \\
&= (1-\beta)\overrightarrow{AC} + \frac{\beta}{2}\overrightarrow{AB}\,.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Como consequência da regra do paralelogramo segue $1-\gamma = \frac{\beta}{2}$ e $1-\beta = \frac{\gamma}{2}$. Portanto temo o sistema

$$\begin{cases} \gamma + \frac{1}{2}\beta = 1 \\ \frac{1}{2}\gamma + \beta = 1 \end{cases}$$

cuja a solução é $\beta = \gamma = \frac{2}{3}$. Por fim, temos que determinar α. Para isso basta substituir γ na equação 1.2 e observar que as diagonais de paralelogramo se cruzam no seu ponto médio, ver Exemplo 1.8. Assim $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

Equação paramétrica da reta. Uma caracterização algébrica para os pontos de uma reta pode ser obtida facilmente por meio da teoria apresentada até aqui. Com efeito, seja $\mathbf{r}$ a reta determinada pelos pontos A e B. Então um ponto P pertence à $\mathbf{r}$ e se somente se $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{AB}$, isto é, se e somente se existe um número real t tal que vale a identidade

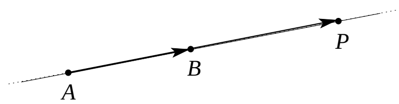

Figura 1.6: O ponto P pertence à reta se e somente se AP e AB são colineares.

$$\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AB}\,.$$

que é conhecida como *equação paramétrica da reta.* Essa equação informa que, se $t > 0$, o ponto P está localizado a uma distância $t|AB|$ de A, na direção e no sentido de AB. Se $t < 0$, o sentido de deslocamento é o de BA. O vetor $\mathbf{d} := \overrightarrow{AB}$ chama-se *vetor direção* da reta e, evidentemente, não é único. Sejam $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ os vetores direção de duas retas não-coincidentes. Então elas são paralelas se e somente se os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ têm a mesma direção se e somente se existe um número real $\alpha \neq 0$ tal que $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$. Temos assim uma caracterização algébrica da noção de paralelismo de retas.

Exemplo 1.10. Considere um triângulo ABC. Vamos determinar a equação paramétrica da reta que contém a mediana referente ao lado BC. A resultante da adição $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ intercepta o lado $\overline{BC}$ no ponto médio, logo a direção da reta desejada é exatamente esse vetor. Portanto a equação da reta é $\overrightarrow{AP} = t(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

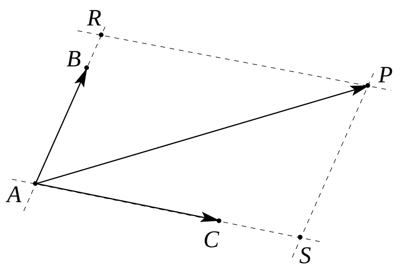

Figura 1.7: O ponto P pertence ao plano se e somente se AP, AB e AC são coplanares.

Equação paramétrica do plano. Vamos levar o argumento acima um pouco adiante e mostrar que podemos caracterizar todos os pontos do plano algebricamente. Para isso introduziremos um pouco mais de notação: um vetor $\mathbf{u}$ é paralelo a uma reta $\mathbf{r}$ se ela contém um representante AB de $\mathbf{u}$. Analogamente um vetor $\mathbf{u}$ é paralelo a um plano $\boldsymbol{\pi}$ quando existe um representante de $\mathbf{u}$ contido em $\boldsymbol{\pi}$.

Geometricamente um plano $\boldsymbol{\pi}$ fica inteiramente determinado por três pontos, digamos A, B e C, não-colineares. Sejam $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ as retas determinadas pelos pares de pontos A e B e A e C, respectivamente. Ambas as retas estão inteiramente contidas em $\boldsymbol{\pi}$. Seja P um ponto de $\boldsymbol{\pi}$. Como os três pontos que determinaram o plano são não-colineares, a reta $\mathbf{r}'$ passando por P e paralela à $\mathbf{r}$ intersecta $\mathbf{s}$ em ponto S. Similarmente, a reta $\mathbf{s}'$ passando por P e paralela à $\mathbf{s}$ intersecta $\mathbf{r}$ em R. As equações paramétricas das retas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ associadas à regra do paralelogramo nos dão $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{AS} = t\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$ para algum par de números reais t, s. Isto é:

$$\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}\,. \tag{1.4}$$

Reciprocamente, se um ponto P é tal que vale a equação acima, existe um ponto R no plano $\boldsymbol{\pi}$ tal que AR é um representante de $r\,\overrightarrow{AB}$ e RP é um representante $s\,\overrightarrow{AB}$. Portanto RP é paralelo aos segmento orientado AB. Comos A, B e R estão no plano $\boldsymbol{\pi}$, conclui-se que P também está nesse plano. Portanto, um ponto P pertence ao plano $\boldsymbol{\pi}$ se e somente se existem números reais t e s de tal forma que vale a Equação (1.4).

As equações paramétricas da reta e do plano podem ser utilizadas para verificar se determinados pontos do espaço são colineares ou coplanares, respectivamente.

Exemplo 1.11. Vamos verificar que o centro de um cubo pertence a um plano determinado por uma aresta e uma diagonal de face que partem do mesmo vértice. Sejam $ABCDA'B'C'D'$ um cubo e $\overline{AB'}$ e $\overline{AD}$ a diagonal e a aresta. Para esta escolha vamos mostrar que o segmento orientado $\overrightarrow{AC'}$, que contem o centro do cubo, está contido no plano gerado por DAB'. Basta escrever $\overrightarrow{AC'}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AB'}$ e $\overrightarrow{AD}$. De fato, $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD}$.

1.5 Bases

O argumento usado para caracterizar os pontos de uma reta e de um plano pode ser facilmente adaptado para caracterizar algebricamente os pontos de todo o espaço E. De fato, sejam A, B, C e D quatro pontos não-coplanares e P é um ponto qualquer do espaço. Seja $\boldsymbol{\pi}$ o plano determinado por A, B e C. Como D não pertence a $\boldsymbol{\pi}$ o vetor $\overrightarrow{AD}$ não possui representante em $\boldsymbol{\pi}$. Logo, a reta $\mathbf{r}$ que passa por P e é paralela ao vetor $\overrightarrow{AD}$ intercepta o plano $\boldsymbol{\pi}$ em um único ponto, digamos P'. Então, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{P'P}$. Como P' pertence ao plano $\boldsymbol{\pi}$ e $\overrightarrow{P'P}$ é paralelo ao vetor $\overrightarrow{AD}$, conclui-se que existem números reais t, s e r tais que

$$\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC} + r\,\overrightarrow{AD}\,. \tag{1.5}$$

Esses argumentos mostram muito mais. O vetor $\overrightarrow{AP}$ é uma soma, modulada por números reais, de vetores paralelos ao objeto geométrico em questão e os coeficientes são unicamente determinados. Uma releitura dessas equações nos informam que todo vetor paralelo a uma reta é p produto de um número real por um vetor particular; todo vetor paralelo a um plano é a soma, modulada por números reais, de dois vetores particulares; e todo vetor é soma, modulada por números reais, de três vetores particulares. E, em todos os casos, os coeficientes são unicamente determinados. Esse fatos notáveis motivam vários conceitos, que introduziremos a seguir.

Combinação linear. Dizemos que o vetor $\mathbf{v}$ é combinação linear dos vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ quando existem números reais $\alpha_1, ...\alpha_n$ tais que

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n.$$

Exemplo 1.12. Considere um paralelogramo $ABCD$, um ponto E sobre o lado $\overline{AB}$ de forma que $|EB| = 3|AE|$ e um ponto F sobre o lado $\overline{DC}$ tal que $|DF| = |FC|$. Vejamos como escrever o vetor $\overrightarrow{FE}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$. Primeiro observe que $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Portanto

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FE} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\,.\end{aligned}$$

Dependência e independência linear. Dizemos que um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}\}$ é *linearmente independente* (LI) quando a equação

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = 0$$

possui apenas a solução $\alpha_1 = \alpha_2 = ...\alpha_n = 0$. Caso contrário, o conjunto é chamado *linearmente dependente* (LD).

Pela definição, o conjunto contendo apenas o vetor nulo é linearmente dependente, pois $\alpha 0 = 0$ qualquer que seja o número real α. Pela mesma razão, qualquer conjunto que contenha o vetor nulo é linearmente dependente. Por outro lado qualquer conjunto contendo apenas um vetor $\mathbf{v}$ não-nulo é linearmente independente, pois nesse caso $\alpha\mathbf{v} = 0$ e se somente se $\alpha = 0$. Segue também da definição que se em um dado conjunto um vetor puder ser escrito como combinação linear de outros do mesmo conjunto, então este conjunto é linearmente dependente.

Exemplo 1.13. Considere uma pirâmide $OACB$ tal que as faces que tem o ponto O são todas formadas por triângulos congruentes retângulos em O. Vamos mostrar que $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}$, em que D é o ponto médio do lado $\overline{CB}$ são linearmente dependentes. Para isso, vamos escrever o vetor $\overrightarrow{DA}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$. De fato, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA}$. Como D é ponto médio de $\overline{BC}$ não é difícil ver que $\overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Portanto, $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$ ou, ainda, $\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 0$.

Conjunto gerador. Dizemos que um conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ gera V se todo vetor se escreve como combinação linear de elementos desse conjunto, isto é, se para todo vetor $\mathbf{v}$ existem números reais $\alpha_1, ...\alpha_n$ tais que

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{v}_n.$$

Bases. Dizemos que um conjunto de vetores $\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ é uma *base* de V se ele é linearmente independente e gera V. Se os vetores de $\boldsymbol{\beta}$ são dois a dois ortogonais, dizemos que a base é *ortogonal*. Se além de ortogonais entre si, todos os vetores de $\boldsymbol{\beta}$ são unitários, dizemos que a base é *ortonormal*. Ao longo destas notas, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ indicará uma base ortonormal.

Seja $\mathbf{v}$ um vetor não-nulo. As combinações lineares de $\mathbf{v}$ são os vetores $t\mathbf{v}$, em que t é um número real. Dado um ponto A de E qualquer, existem dois pontos B e P tais que $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ e $t\mathbf{v} = \overrightarrow{AP}$. Logo, tem-se $\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AB}$, isto é, para cada valor de t, o ponto P está sobre a retas determinada pelos pontos A e B. Por esta razão, dizemos que um vetor não-nulo gera uma reta.

Se dois vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes, então eles não podem ter representantes em uma mesma reta. De fato, se fosse o contrário, existiria um número real λ tal que $\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_2$ ou $\mathbf{v}_2 = \lambda\mathbf{v}_1$. Em qualquer caso a equação $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = 0$ possuiria uma solução na qual os coeficientes não seriam todos nulos, contrariando a hipótese de independência linear entre os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Consideremos as combinações lineares $\mathbf{v} = t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2$. Como os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ não são colineares, dado um ponto A qualquer do espaço euclidiano existem pontos B, C e P tais que $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{AC}$ e $\mathbf{v} = \overrightarrow{AP}$. Então $\overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}$. Isto é, o ponto P pertence ao plano gerado pelos pontos A, B e C. Por isso, dizemos que dois vetores linearmente independentes geram um plano.

Podemos prosseguir desse modo para mostrar que três vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ linearmente independentes geram V. Para isso, primeiro mostraremos que os três vetores em questão não possuem representantes em um mesmo plano. Os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são LI (mostre!) e portanto geram um plano. Se $\mathbf{v}_3$ tivesse representante nesse plano teríamos $\mathbf{v}_3 = t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2$ para algum par de números reais t e s. Consequentemente, os três vetores seriam LD. Portanto, dado um ponto qualquer A do espaço E, existe pontos B, C e D, não-coplanares com A, tais que $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{AC}$ e $\mathbf{v}_3 = \overrightarrow{AD}$. Para um vetor $\mathbf{v}$ qualquer existe um ponto P em E, tal que $\mathbf{v} = \overrightarrow{AP}$. Portanto, existem três números reais t, s e r tais que

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AP} = t\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC} + r\,\overrightarrow{AD} = t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2 + r\mathbf{v}_3.$$

A discussão acima mostrou ainda que: se o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ gera o espaço vetorial V, então $n \geq 3$; se o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é LI, então $n \leq 3$. Podemos, portanto concluir que vale

Proposição 1.2. *Qualquer conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ LI é uma base de V e toda base de V têm exatamente três vetores.*

Como toda base de V tem três elementos, dizemos que a *dimensão* de V (e de E) é três. A discussão acima permite concluir ainda que: (1) dois vetores LI nunca geram uma reta, pois eles geram um plano; e (2) três vetores LI nunca geram um plano, pois eles geram o espaço. Portanto os conjuntos LI que geram retas têm exatamente um elemento e os conjuntos LI que geram planos têm exatamente dois elementos. Por essa razão dizemos que a dimensão dos planos é dois e a dimensão das retas é um. Os conjuntos LI que geram planos e retas também são chamados bases dos planos e retas correspondentes.

Bases ordenadas. Uma *base ordenada* é uma base em que se escolheu uma ordem para os seu elementos. Se $\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ é uma base ordenada de V, uma mudança na ordem que aparecem os elementos produz outra base ordenada. Assim, a base ordenada $\boldsymbol{\gamma} = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_3}\}$ é diferente da base ordenada $\boldsymbol{\beta}$.

1.6 Sistemas de Coordenadas

Na Seção 1.4 usamos vetores para localizar um ponto sobre uma reta, um plano ou mesmo no espaço a partir de um ponto conhecido nesses objetos. Se O é um ponto do espaço, o vetor $\overrightarrow{OP}$ nos dá a direção, o sentido e a distância em que se deve deslocar para se chegar ao ponto P, localizando, portanto, o ponto P a partir de O. Por essa razão, costuma-se chamar o vetor $\overrightarrow{OP}$ de *vetor posição* ou *vetor deslocamento.* Nesta seção desenvolveremos essa idéia um pouco mais.

Sistemas de coordenadas. Um *sistema de coordenadas* para o espaço vetorial V é uma escolha de uma base ordenada para V. Escolhida uma base ordenada $\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, qualquer vetor $\mathbf{v}$ é determinado de forma única por uma tripla ordenada de números reais $(v_1, v_2, v_3)^T =: \mathbf{v}_{\boldsymbol{\beta}}$ tal que $\mathbf{v} = v_1\mathbf{v}_1 + v_2\mathbf{v}_2 + v_3\mathbf{v}_3$. O T sobrescrito indica a transposta de uma matriz. Com isso, convencionamos que a tripla ordenada que representa as coordenadas do vetor $\mathbf{v}$ na base β será representada por uma matriz coluna. Não é difícil perceber que, fixado uma base para o espaço V, a adição de vetores e o produto por número real se dão coordenada a coordenada. Esse fato deixa claro a relação entre o espaço vetorial V e o espaço $\mathbb{R}^3$ apresentado anteriormente. Os exemplos a seguir mostram como tirar proveito dessa relação, para isso consideraremos uma base ordenada $\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ fixada.

Exemplo 1.14. As coordenadas do vetor nulo em V são todas iguais a zero, ou seja, $0 = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3$, logo $0_{\boldsymbol{\beta}} = (0, 0, 0)^T$.

Exemplo 1.15. Dados três vetores $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v_1} + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$ e $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ decidiremos se eles são linearmente independentes ou não. Vejamos quais são as soluções da equação $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \alpha_3\mathbf{u}_3 = 0$.

$$\begin{aligned}
\alpha_1\mathbf{u}_1 &= \alpha_1\mathbf{v_1} + \alpha_1\mathbf{v}_2 + \alpha_1\mathbf{v}_3\\
\alpha_2\mathbf{u}_2 &= 2\alpha_2\mathbf{v}_1 \qquad\qquad + \alpha_2\mathbf{v}_3\\
\alpha_3\mathbf{u}_3 &= \alpha_3\mathbf{v}_1 - 2\alpha_3\mathbf{v}_2 - \alpha_3\mathbf{v}_3
\end{aligned}$$

Somando termo a termo, temos

$$0 = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)\mathbf{v}_1 + (\alpha_1 - 2\alpha_3)\mathbf{v}_2 + (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)\mathbf{v}_3.$$

Logo,

$$\begin{cases}
\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0\\
\alpha_1 \qquad\quad - 2\alpha_3 = 0\\
\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0
\end{cases}$$

Observe que as coordenadas dos vetores são $[\mathbf{u}_1]_\beta = (1,1,1)^T, [\mathbf{u}_2]_\beta = (2,0,1)^T$ e $[\mathbf{u}_3]_\beta = (1,-2,-1)^T$. O sistema acima pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Portanto, decidir se os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ são linearmente independentes é equivalente a decidir se as triplas ordenadas que representam suas coordenadas são linearmente independentes vistas como vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Coordenadas cartesianas. De forma análoga, define-se um sistema de coordenadas para o espaço E, bastando para isso escolher um ponto O, que será chamado de origem, e uma base ordenada $\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ para V. Com isso, qualquer ponto P em E é determinado de forma única por uma tripla ordenada de números reais $(x, y, z)_{O,\boldsymbol{\beta}}$

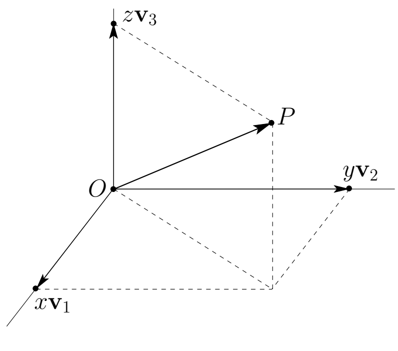

Figura 1.8: Sistema de coordenadas cartesianas.

com auxílio da equação $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$, Figura 1.8. Um sistema de coordenadas ortonormais para o espaço euclidiano E, isto é, um par $\{O, \boldsymbol{\beta}\}$ em que O é ponto de E e $\boldsymbol{\beta}$ é uma base ordenada ortonormal de V, chama-se *sistema de coordenadas cartesianas.*

Para os exemplos abaixo consideraremos um sistema de coordenadas $\{O, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ para E.

Exemplo 1.16. Determinaremos a equação paramétrica da reta que tem direção $\mathbf{v} = 4\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ e passa pelo ponto $P_0(3, 1, 2)$ em função do sistema de coordenadas cartesianas dado. Sabemos que um ponto $P(x, y, z)$ pertence a reta se e somente se $\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$. Isto é,

$$(x-3)\mathbf{v}_1 + (y-1)\mathbf{v}_2 + (z-2)\mathbf{v}_3 = t(4\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3).$$

Logo,

$$\begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = -2t + 1 \\ z = t + 2\,. \end{cases}$$

Exemplo 1.17. Seja $\boldsymbol{\pi}$ o plano que passa pelo ponto $A(-1, 2, 2)$ e é paralelo aos vetores $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$, $\mathbf{v} = -\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3$. Sabemos que um ponto $P(x, y, z)$ pertence a $\boldsymbol{\pi}$ se e somente se $\overrightarrow{AP} = t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$. Observe que

$$\overrightarrow{AP} = (x+1)\mathbf{v}_1 + (y-2)\mathbf{v}_2 + (z-2)\mathbf{v}_3$$

e

$$\begin{aligned} t\mathbf{u} + s\mathbf{v} &= t(\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + s(-\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3) \\ &= (t-s)\mathbf{v}_1 + (2t+3s)\mathbf{v}_2 + (-t-2s)\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Logo, a equação paramétrica de $\boldsymbol{\pi}$ é

$$\begin{cases} x = t - s - 1 \\ y = -2t + 3s + 2 \\ z = -t - 2s + 2\,. \end{cases}$$

1.7 O Produto Interno

A estrutura algébrica apresentada até agora reflete algumas propriedades dos objetos geométricos. As propriedades métricas do espaço euclidiano, como comprimento e área, estão codificadas na noção de norma de um vetor. Entretanto, a norma não possui boas propriedades algébricas, por exemplo, a relação entre $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$ e as normas $\|\mathbf{u}\|$ e $\|\mathbf{v}\|$ não é imediata. Precisamos, portanto, buscar um conceito que reflita as propriedades métricas do espaço euclidiano E e ao mesmo tempo tenha boas propriedades algébricas. Isso será conseguido pela primeira noção de produto de vetores a ser introduzida, a saber, o *produto interno.*

A forma mais comum de se apresentar o produto interno entre vetores é primeiro considerar um sistema de coordenadas ortonormais fixado e a partir dai definir o produto por uma fórmula que depende da base fixada. A principal vantagem dessa abordagem é a simplicidade da fórmula algébrica usada para definir o produto interno. A desvantagem é a necessidade de mostrar que essa definição não depende da base previamente escolhida. Nestas notas, preferimos a abordagem geométrica pela sua naturalidade e clareza de interpretação.

Produto interno. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores com representantes AB e CD, respectivamente. Se $\mathbf{u}$ é não-nulo, sejam C' e D' as *projeções ortogonais* de C e D sobre a reta suporte de AB, isto é, os pés das perpendiculares à reta suporte de AB que passam por C e D, respectivamente, Figura 1.9. Define-se o produto interno entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ por

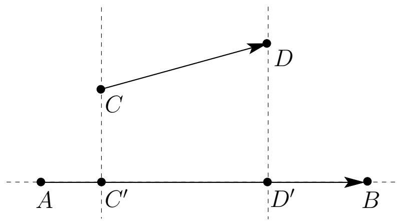

Figura 1.9: O Segmento orientado AC' é a projeção ortogonal de AC sobre AB.

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \begin{cases} |AB|\,|C'D'| & \text{se } \mathbf{u}\neq 0 \text{ e } AB \text{ e } C'D' \text{ têm o mesmo sentido;}\\ -|AB|\,|C'D'| & \text{se } \mathbf{u}\neq 0 \text{ e } AB \text{ e } C'D' \text{ têm sentidos opostos;}\\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A relação de equipolência entre os representantes dos vetores envolvidos na definição de produto interno de vetores permite garantir que essa operação está bem definida. O Produto interno goza de boas propriedades algébricas: é comutativo, distributivo, homogêneo e reflete as propriedades métricas da norma como se pode ver a seguir.

Propriedades do produto interno. Para todos os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e todo número real α vale:

I1 *Comutatividade:* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$;

I2 *Distributividade:* $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$;

I3 *Homogeneidade:* $(\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$;

I4 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$.

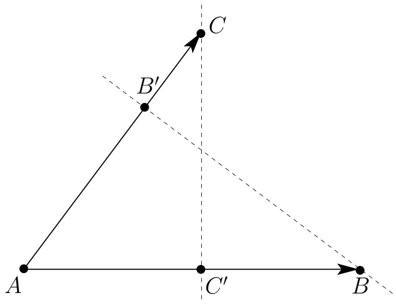

Figura 1.10: Os triângulos ABB' e ACC' são similares.

Para demonstrar essas propriedades é útil observar que se α é um número real tal que $C'D' = \alpha AB$, então $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \alpha|AB|^2$. Prova-se **I1** por semelhança de triângulos. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores não-ortogonais com representantes AB e AC, respectivamente, Figura 1.10. Sejam B' e C' as projeções ortogonais dos ponto B e C sobre a reta suporte de AC e AB, respectivamente. Sejam α e β números reais tais que $AC' = \alpha AB$ e $AB' = \beta AC$. Então, o ângulo BAC é comum aos triângulos ABB' e ACC'; os ângulos $AB'B$ e $AC'C$ são retos. Logo os triângulos ABB' e ACC' são semelhantes e, portanto

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AC'|}{|AB'|} = \frac{\alpha|AB|}{\beta|AC|}\,.$$

A segunda igualdade na equação acima decorre de α e β serem ambos positivos ou ambos negativos, conforme seja o ângulo BAC agudo ou obtuso, respectivamente. Portanto, $\alpha|AB|^2 = \beta|AC|^2$ ou equivalentemente $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$. Se os vetores são ortogonais, a igualdade vale trivialmente.

Provaremos agora **I2**: Seja CD um representante do vetor $\mathbf{w}$ e D' a projeção de D sobre a reta suporte de AB, Figura 1.11. Então temos $AD' = AC' + C'D'$. Sejam α, β e γ números reais tais que $AC' = \alpha AB$, $C'D' = \beta AB$ e $AD' = \gamma AB$. Então

$$\begin{aligned}
\gamma\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{\gamma AB} \\
&= \overrightarrow{\alpha AB} + \overrightarrow{\beta AB} \\
&= \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AB} \\
&= (\alpha + \beta)\overrightarrow{AB}\,.
\end{aligned}$$

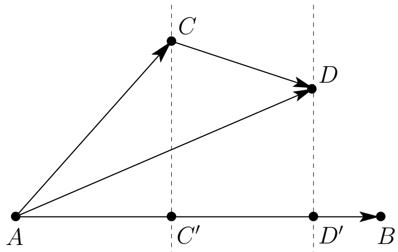

Figura 1.11: $AD' = AC' + C'D'$.

Logo, $\gamma = \alpha + \beta$. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \gamma |AB|^2 \\ &= (\alpha + \beta)|AB|^2 \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}.\end{aligned}$$

Se qualquer um dos vetores é zero, a igualdade é trivial. Deixaremos as demonstrações das propriedades **I3** e **I4** para o leitor.

Produto interno e geometria. A propriedade **I4** informa que o produto interno codifica as propriedades métricas do espaço euclidiano E. Por exemplo, sabemos que vetores não-paralelos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, cuja soma é zero, representam os lados de um triângulo; um cálculo imediato, usando as propriedades, mostra como os comprimentos dos lados desse triângulo se relacionam:

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\,. \tag{1.6}$$

Um outro fato importante é que o produto interno fornece também uma contrapartida algébrica para a noção geométrica de ortogonalidade de forma muito simples e elegante:

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \iff \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0\,.$$

Assim, se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, o triângulo é retângulo, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é a hipotenusa e a Equação (1.6) corresponde ao *Teorema de Pitágoras*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\,. \tag{1.7}$$

Exemplo 1.18. Usando a equação (1.6) podemos calcular o produto interno dos vetores gerados pelos lados de um triângulo equilátero. Sejam ABC o triângulo equilátero de lado l e $\mathbf{u} := \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} := \overrightarrow{AC}$. Então,

$$l^2 = l^2 + l^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\,,$$

logo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \dfrac{l^2}{2}$.

Exemplo 1.19. Utilizaremos o produto interno para mostrar que as diagonais dos losangos se cruzam ortogonalmente. De fato, se o losango é determinado pelos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, então $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$ e suas diagonais são determinadas pelos vetores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. Segue

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2 = 0\,.$$

Projeção ortogonal. Sejam $\mathbf{u}$ um vetor não-nulo e $\mathbf{v}$ qualquer. Gostaríamos de escrever

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u} + \mathbf{w}$$

em que $\mathbf{w}$ é ortogonal a $\mathbf{u}$. Tomando o produto interno de ambos os membros da igualdade com o vetor $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \alpha\|\mathbf{u}\|^2 \,.$$

Logo,

$$\alpha = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \,.$$

Definimos a projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre o $\mathbf{u}$ por

$$\operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} := \alpha\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u} \,.$$

Utilizando as propriedades do produto interno podemos reescrever a projeção ortogonal da seguinte forma:

$$\operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}\right)\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \,.$$

O vetor $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ é o vetor unitário paralelo a $\mathbf{u}$, ou seja, tal vetor representa a direção de $\mathbf{u}$; o vetor $\operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$ é a componente de $\mathbf{v}$ na direção de $\mathbf{u}$. Além disso, $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$ é ortogonal a $\mathbf{u}$.

Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt. A projeção ortogonal dá um método algébrico para se obter uma base ortonormal a partir de uma base qualquer de V. A ideia é simples, comece com três vetores linearmente independentes $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, coloque

$$\mathbf{u}_1 := \mathbf{u}$$

e

$$\mathbf{u}_2 := \mathbf{v} - \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} \,.$$

Então os vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são ortogonais. Tome o vetor $\mathbf{w}$ e subtraia dele as projeções sobre os vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, isto é, o terceiro vetor é

$$\mathbf{u}_3 := \mathbf{w} - \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{w} - \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}_2} \mathbf{w}$$

Por fim, coloque: $\mathbf{e}_i := \mathbf{u}_i/\|\mathbf{u}_i\|$, para $i = 1, 2, 3$. A base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ assim obtida é ortonormal.

Exemplo 1.20. Sejam $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ vetores unitários que determinam uma pirâmide regular. Aplicaremos o processo de Gram-Schmidt para estes vetores. Primeiro observe que, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = \frac{1}{2}$. Executando o algoritmo de ortonormalização, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_1\,, \end{aligned}$$

Logo, $\|\mathbf{u}_2\|^2 = \dfrac{3}{4}$ e $\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2 = \dfrac{1}{4}$. Portanto,

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{1}{3}\mathbf{u}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_1$$

e $\|\mathbf{u}_3\| = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

O produto interno e bases ortonormais. Seja $\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ um base do espaço vetorial V. A caracterização de ortogonalidade e norma, por meio do produto interno, informa que $\mathbf{e}_i$ é ortogonal a $\mathbf{e}_j$ se e somente se $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ e $\mathbf{e}_i$ é unitário se e somente se $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$. Portanto, a base $\boldsymbol{\beta}$ é ortogonal se somente se

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$$

e ortonormal se e somente se, além disso,

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1\,.$$

A caracterização de bases ortonormais acima permite exprimir o produto interno aritmeticamente: sejam $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) \cdot (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) \\ &= u_1v_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + u_2v_2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + u_3v_3\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 + u_1v_2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \cdots \end{aligned}$$

Como $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$ e todos as parcela a partir de $u_1v_2\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2$, inclusive, são nulas, temos

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\,.$$

Em particular, vale para a norma de vetores,

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^3\,.$$

Além disso, podemos representar as coordenadas do vetor $\mathbf{u}$ utilizando o produto interno, $\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3$.

Nesta seção apresentamos a definição de produto interno de forma puramente geométrica. Na seção seguinte faremos o mesmo com o produto exterior de vetores. Embora ambos os produtos possam também ser facilmente introduzidos a partir do conceito de base ortonormal do espaço vetorial, adotamos esta abordagem para enfatizar a interpretação geométrica desses produtos e desencorajar o uso excessivo dos sistemas de coordenadas.

Exercícios

1.1. Seja S o conjunto dos segmentos orientados. Mostre que:

(a) A *direção* é uma relação de equivalência em S;

(b) O *sentido* é uma relação de equivalência em S;

(c) A *equipolência* é uma relação de equivalência em S.

1.2. Seja $\mathbf{w}$ um vetor não-nulo. Considere a seguinte relação em V, $\mathbf{v} \sim \mathbf{u} \iff \mathbf{v} - \mathbf{u} = \lambda \mathbf{w}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência em V ;

b) Defina as seguintes operações no conjunto $V/\sim$ das classes de equivalências:

$$\overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{v}} := \overline{\mathbf{u} + \mathbf{v}}$$
$$\alpha \overline{\mathbf{u}} := \overline{\alpha \mathbf{u}} \, .$$

Mostre que as operações de soma e produto por número real estão bem definidas e fornecem um estrutura de espaço vetorial para o conjunto das classes;

c) Determine a dimensão de $V/\sim$.

1.3. Seja X um conjunto não-vazio de vetores linearmente independentes. Mostre que qualquer subconjunto não vazio de X é linearmente independente.

1.4. Considere o conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, 3\}$ munido com as seguintes operações de adição e multiplicação por número real:

i) $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$;

ii) $\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$.

Mostre que:

a) $\mathbb{R}^3$ munido das operações acima é um espaço vetorial;

b) Os vetores $\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ são linearmente independentes e geram $\mathbb{R}^3$. Conclua que a dimensão desse espaço vetorial é 3.

1.5. Seja $\boldsymbol{\pi}$ um plano em E. Seja $W = W(\boldsymbol{\pi})$ o subconjunto de V definido por $W = \{\mathbf{w} \in V |\, \mathbf{w} \text{ possui representantes em } \boldsymbol{\pi}\}$. Mostre que a soma de quaisquer dois vetores em W também pertence a W e que para qualquer vetor em W o produto dele por qualquer número real também pertence a W.

1.6. mostre que os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são os vértices de um paralelogramo.

1.7. Mostre que as alturas de um tetraedro regular se cruzam no mesmo ponto P. Encontre em que proporção P divide a altura do tetraedro.

1.8. Seja $\boldsymbol{\alpha} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ uma base ortonormal para V e $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$. Determine vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ tais que:

a) $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, sendo $\mathbf{x}$ paralelo a $\mathbf{v} := -3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{y}$ ortogonal a $\mathbf{v}$;

b) $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, sendo $\mathbf{x}$ paralelo ao vetor $\mathbf{z} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{y}$ ortogonal a $\mathbf{e}_3$.

1.9. Repita o processo realizado para obter uma fórmula algébrica para o produto interno em função de uma base ortonormal para obter uma expressão algébrica para o produto interno considerando uma base determinada por arestas de um tetraedro regular que partem do mesmo vértice.

1.10. Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vetores ortogonais não-nulos e A um ponto em E. Mostre que os pontos $P \in E$ tais que $\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|$ e $\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{v} = 0$ determinam uma reta.

1.11. Mostre que as retas $\mathbf{r}$, determinada por $P_{\mathbf{r}}(2,-5,1)$, $\mathbf{v}_{\mathbf{r}} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, e $\mathbf{s}$, determinada por $P_{\mathbf{s}}(4,2,-4)$, $\mathbf{v}_{\mathbf{s}} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3$, se interceptam.

1.12. Um vetor $\mathbf{n}$ é *ortogonal a um plano* $\boldsymbol{\alpha}$ se é ortogonal a todo vetor com representante nesse plano. Seja $\boldsymbol{\alpha}$ um plano passando pelo ponto A e P um ponto qualquer. Mostre que:

(a) Se $\mathbf{n}$ é um vetor ortogonal a $\boldsymbol{\alpha}$, então P pertence a esse plano se e somente se

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0\,;$$

(b) Se $\mathbf{r}$ é uma reta ortogonal a $\boldsymbol{\alpha}$, com vetor direção $\mathbf{d}$, então, então P pertence a esse plano se e somente se

$$\mathbf{d} \cdot \overrightarrow{AP} = 0\,.$$

1.13. Use o exercício anterior para mostrar que uma equação para o plano que passa pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ e tem vetor normal $\mathbf{n}_{\boldsymbol{\beta}} = (a, b, c)^T$ é dada por $ax + by + cz = d$ em que $d = ax_0 + by_0 + cz_0$.

1.14. Determine o ponto de encontro do plano $\boldsymbol{\pi}$, determinado pelo ponto $A(1, 0, 2)$ e pelo vetor normal $\mathbf{n} = -3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, com a reta $\mathbf{r}$, determinada pelo ponto $B(1, 1, 1)$ e vetor direção $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1$.

1.15. Mostre a *lei do paralelogramo:*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\big(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\big)\,.$$

1.16. Mostre a *identidade de polarização:*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\big(\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2\big)\,.$$

1.17. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores não-nulos e θ o ângulos entre eles, defina $\cos\theta$ por meio da equação $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta$. Sejam α, β, γ os ângulos entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{e}_3$ respectivamente. Mostre que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

1.18. Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vetores, com $\mathbf{u} \neq 0$, e α um número real. Mostre que a projeção ortogonal sobre $\mathbf{u}$ goza das seguintes propriedades:

(a) $\operatorname{Proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{w}$;

(b) $\operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \alpha\mathbf{v} = \alpha \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$;

(c) $\operatorname{Proj}_{\mathbf{u}}(\operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}) = \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$;

(d) $\operatorname{Proj}_{\alpha\mathbf{u}} \mathbf{v} = \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$, para $\alpha \neq 0$.

1.19. Se $\mathbf{u}$ é um vetor não-nulo e $\mathbf{v}$ um vetor qualquer, defina $\operatorname{Paral}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} := \mathbf{v} - \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$. Mostre que:

(a) $\operatorname{Paral}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \operatorname{Paral}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + \operatorname{Paral}_{\mathbf{u}} \mathbf{w}$;

(b) $\operatorname{Paral}_{\mathbf{u}} \alpha\mathbf{v} = \alpha \operatorname{Paral}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$

(c) $\operatorname{Paral}_{\mathbf{u}}(\operatorname{Paral}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}) = \operatorname{Paral}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$;

(d) $\operatorname{Paral}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} \cdot \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = 0$;

(e) $\operatorname{Paral}_{\mathbf{u}}(\operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}) = 0$;

(f) $\operatorname{Proj}_{\mathbf{u}}(\operatorname{Paral}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}) = 0$;

(g) $\mathbf{v} = \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} + \operatorname{Paral}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$;

(h) dê uma interpretação geométrica para $\operatorname{Paral}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$.

Capítulo 2

Bivetores e Trivetores

A partir dos segmentos orientados no espaço euclidiano, construiu-se o conjunto V munido de uma estrutura algébrica formada por duas operações: adição e produto por número real Neste capítulo mostraremos como construir dois novos espaços vetoriais, o primeiro a partir do conceito de *paralelogramo orientado* (segmento orientado de plano) e o segundo a partir de *paralelepípedos orientados* (segmentos orientados do espaço).

2.1 Bivetores e Trivetores

O procedimento para construção de espaços vetoriais a partir dos paralelogramos e dos paralelepípedos é inteiramente similar à construção dos vetores a partir dos segmentos orientados. Começaremos esclarecendo o que se entende por paralelogramos e paralelepípedos orientados.

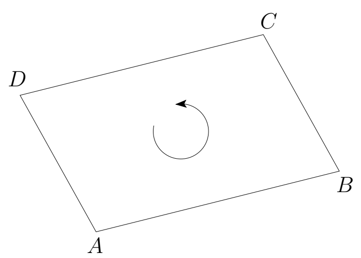

Figura 2.1: Paralelogramo orientado no sentido $ABCD$.

Paralelogramos orientados. Um *paralelogramo orientado* é um paralelogramo no qual se escolheu um sentido para percorrer os seus lados, isto é, se A, B, C e D são os pontos consecutivos de um paralelogramo, podemos orientá-lo de duas formas ou $ABCD$ ou $ADCB$, Figura 2.1. Na definição de paralelogramo orientado, admitiremos paralelogramos em que lados opostos podem ter comprimento zero, ou seja, pontos e segmentos são aceitos como paralelogramos. Nesse caso diremos que eles são degenerados. Qualquer permutação circular da sequência A, B, C, D define o mesmo paralelogramo orientado. Assim, os paralelogramos orientados $ABCD$ e $BCDA$ são iguais.

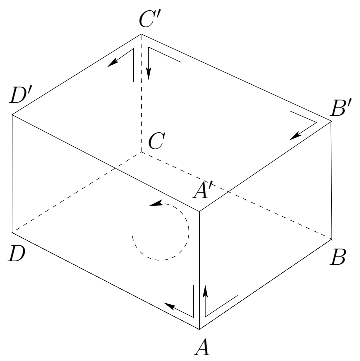

Figura 2.2: Paralepípedo orientado: a orientação de uma face determina a orientação das outras.

Paralelepípedos orientados . Para orientar um paralelogramo basta escolher um de seus lados e orientá-lo. A orientação desse lado determina automaticamente uma orientação para todos os outros lados. Usaremos essa propriedade para orientar os paralelepípedos: escolha uma face do paralelepípedo e a oriente; a orientação dessa face determina uma orientação para todas as outras faces de modo que arestas comuns às faces adjacentes têm orientação em uma face contrária à orientação que recebe na outra face, veja Figura 2.2. Verifica-se imediatamente que os paralelepípedos admitem exatamente duas orientações. A exemplo dos paralelogramos, admitiremos paralelepípedos degenerados, isto é, pontos, segmentos e paralelogramos são admitidos como paralelepípedos de volume zero. Agora precisamos definir módulo e esclarecer quando dois paralelogramos orientados possuem mesma direção e mesma orientação. Para paralelepípedos orientados basta esclarecer quando dois deles possuem a mesma orientação, isso sugere que o espaço originado pelos paralelepípedos é de algum modo singular. Abordaremos essa questão mais adiante.

Módulo. O *módulo* ou *área de um paralelogramo orientado* é a área do paralelogramo correspondente; o *módulo* ou *volume de um paralelepípedo orientado* é volume do paralelepípedo correspondente. Paralelogramos e paralelepípedos orientados degenerados possuem módulo igual a zero, por definição.

Direção. Dois paralelogramos orientados não-degenerados possuem a mesma *direção* se estão em planos paralelos.

Orientação. Definir quando dois paralelogramos, ou dois paralelepípedos orientados, têm a mesma orientação não é tão imediato quanto no caso de segmentos orientados. Intuitivamente, ao percorrer os lados de um paralelogramo orientado no sentido da orientação de seus lados, a região limitada por ele fica à direita ou à esquerda, veja Figura 2.3, então poderíamos dizer que dois paralelogramos orientados, de mesma direção, possuem a mesma orientação se ao percorrelos no sentido da orientação de seus lados, as regiões limitadas por ele ficam ambas à direita ou ambas à esquerda. Caso contrário, diríamos que eles têm orientação oposta. Quanto aos paralelepípedos podemos decidir se eles têm a mesma orientação pela *regra da mão direita:* dado um paralelepípedo orientado P, escolha um vértice qualquer e chame-o de B, repouse a mão direita sobre B e faça os dedos médio, indicador e polegar apontar para os vértices adjacentes a B, chame de A e C os vértices para o quais apontam os dedos médio e indicador, respectivamente. Se a face determinada pelos pontos A, B e C está orientada no sentido ABC, dizemos que P está orientado segundo a regra da mão direita, Figura 2.4. Caso contrário, dizemos que P está orientado com orientação oposta à regra da mão-direita.

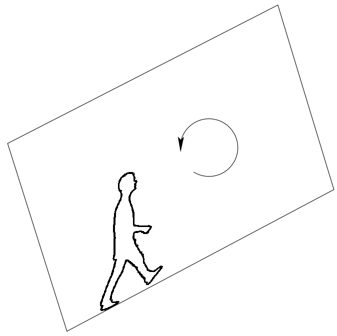

Figura 2.3: Ao se mover sobre os lados de um paralelogramo seguindo sua orientação a região limitada fica à direita ou à esquerda.

Dizemos que dois paralelepípedos têm a mesma orientação se eles tiverem a mesma orientação em relação à essa regra, caso contrário, dizemos que eles têm orientações opostas. No Apêndice apresentamos definições rigorosas do conceito de orientação para o leitor mais exigente.

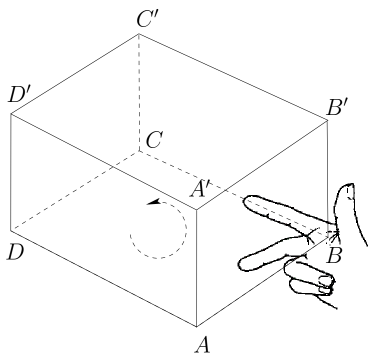

Figura 2.4: Paralelepípedo orientado de acordo com a regra da mão direita.

Equivalência de paralelogramos e paralelepípedos orientados. Estamos em condições de definir a ideia de *paralelogramos* e *paralelepípedos orientados equivalentes* como fizemos para os segmen-

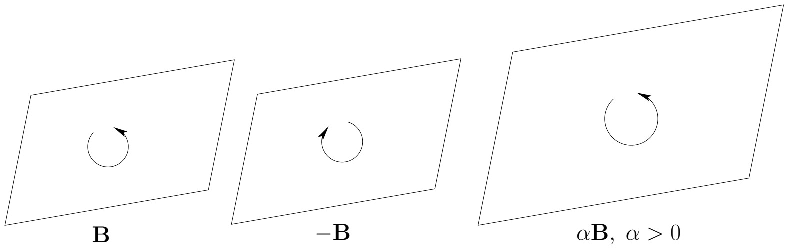

Figura 2.5: Produto por número real por um bivetor **B**.

tos orientados. Dizemos que dois paralelogramos são equivalentes quando quando ambos forem degenerados ou ambos possuírem a mesma área, direção e orientação. Dizemos que dois paralelepípedos orientados são equivalentes se eles possuírem o mesmo volume e a mesma orientação.

Bivetores e trivetores. Dado um paralelogramo orientado B, chamaremos de *bivetor* $\mathbf{B}$ o conjunto formado por todos os paralelogramos orientados equivalente a B. Dado um paralelepípedo orientado T, chamaremos de *trivetor* $\mathbf{T}$ o conjunto de todos os paralelepípedos orientados equivalente a T. Indicaremos os bivetores e trivetores por letras latinas maiúsculas em negrito. O conjunto dos bivetores será indicado por $\mathbb{B}$ e o conjunto dos trivetores por $\mathbb{T}$. A exemplo do vetores, os bivetores herdam de seu representantes as noções de *direção*, *orientação* e *norma* (*módulo* ou *área*). A norma de um bivetor $\mathbf{B}$, será indica por $\|\mathbf{B}\|$. Os trivetores herdam de seus representantes as noções de *norma* (*módulo* ou *volume*) e *orientação*. A norma de um trivetor $\mathbf{T}$ será indicada por $\|\mathbf{T}\|$.

Assim como os vetores, os bivetores ficam determinados por um de seus representantes ou pela especificação de sua direção, norma e orientação. De fato: (1) sua direção especifica em que planos o bivetor possui representantes; (2) escolhidos um desses planos, traçamos nele qualquer paralelogramo cuja área seja a área do bivetor; e (3) o orientamos seguindo a orientação dada para obter um representante do bivetor. Os trivetores ficam determinados especificando-se sua orientação e norma.

Produto de número real por bivetor ou por um trivetor. Sejam $\mathbf{B}$ um bivetor e α um número real. O produto $\alpha\mathbf{B}$ é definido pela especificação de sua direção, norma e orientação. Começaremos descrevendo o efeito do produto por -1, ele terá a mesma função que tinha no caso de vetores, inverterá a orientação do bivetor, Figura 2.5. Portanto, $-\mathbf{B}$ tem a mesma direção e norma que $\mathbf{B}$, mas com orientação oposta. O produto por um número real positivo será entendido apenas como uma dilatação do módulo do bivetor, Figura 2.5. Ou seja, o bivetor $\alpha\mathbf{B}$ terá as mesmas direção e orientação de $\mathbf{B}$, enquanto sua norma será dada por $\|\alpha\mathbf{B}\| = \alpha\|\mathbf{B}\|$. Por fim, se α é negativo, $\alpha\mathbf{B} := -\alpha(-\mathbf{B})$. Isto é, o produto por um número real negativo é uma mudança de orientação, seguida de uma dilatação. Se α ou $\mathbf{B}$ é nulo, define-se $\alpha\mathbf{B} = 0$. O produto de um número real por um trivetor é definido por analogia.

Caracterização do produto de número real por bivetor. Diremos que dois bivetores são paralelos se um deles é nulo ou, caso contrário, se eles têm a mesma direção. As seguintes propriedades caracterizam o produto do número real α pelo bivetor $\mathbf{B}$:

(a) $\alpha\mathbf{B} = 0$ se e somente se $\alpha = 0$ ou $\mathbf{B} = 0$;

(b) $\alpha\mathbf{B}$ é paralelo a $\mathbf{B}$;

(c) Se $\mathbf{B}$ é não-nulo, $\alpha\mathbf{B}$ e $\mathbf{B}$ têm o mesmo sentido se $\alpha > 0$ e sentidos opostos se $\alpha < 0$;

(d) $\|\alpha\mathbf{B}\| = |\alpha|\|\mathbf{B}\|$.

Caraterização do produto de número real por trivetor. O produto do número real α pelo trivetor $\mathbf{T}$ é caracterizado pelas propriedades:

(a) $\alpha\mathbf{T} = 0$ se e somente se $\alpha = 0$ ou $\mathbf{T} = 0$;

(c) Se $\mathbf{T}$ é não-nulo, $\alpha\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}$ têm o mesmo sentido se $\alpha > 0$ e sentidos opostos se $\alpha < 0$;

(d) $\|\alpha\mathbf{T}\| = |\alpha|\|\mathbf{T}\|$.

2.2 O Produto Exterior

Mostraremos agora como associar a cada par de vetores um bivetor. Chamaremos essa operação de *produto exterior*, em seguida estenderemos essa operação de modo a tornar possível operar um vetor com um bivetor e vice-versa.

Produto exterior de bivetores. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores. Se $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, podemos encontrar um ponto C tal que $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$, Figura 2.6. Seja D um ponto tal que $ABCD$ é um paralelogramo orientado. Definimos

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \text{o bivetor cujo representante é } ABCD. \tag{2.1}$$

O paralelogramo orientado $ABCD$ é chamado de *paralelogramo gerado* por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. A relação de equipolência garante que os paralelogramos gerados pelos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são equivalentes entre si, portanto, o produto em (2.1) está bem definido. A exemplo do produto interno, o produto exterior tem boas propriedades algébricas.

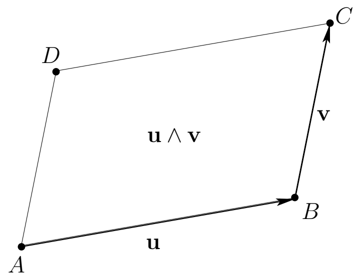

Figura 2.6: Produto exterior dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Propriedades do produto exterior. Para todos bivetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e número real α vale:

E1 *Homogeneidade:* $\alpha\, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (\alpha \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge (\alpha \mathbf{v})$;

E2 *Anticomutatividade:* $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

Para demonstrar a primeira igualdade em **E1**, coloquemos $\mathbf{A} := \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ e $\mathbf{B} := (\alpha \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v}$. Se $\mathbf{A}$ é não-nulo, claramente $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ possuem a mesma direção e a mesma orientação se $\alpha > 0$ (e orientações opostas se $\alpha < 0$). Para relacionar as normas, note que ambos os bivetores possuem a mesma altura relativa à base de direção $\mathbf{u}$. Como as bases estão em proporção $|\alpha|$, segue que $\|\mathbf{B}\| = |\alpha|\|\mathbf{A}\|$. Logo, $\mathbf{B} = \alpha \mathbf{A}$, que é a igualdade almejada. Se α ou $\mathbf{B}$ é nulo a igualdade é imediata. A demonstração da segunda igualdade é completamente análoga. A propriedade **E2** decorre imediatamente da definição uma vez que os paralelogramos orientados $ABCD$ e $ADCB$ têm orientações opostas.

Enquanto ao produto interno codifica algebricamente a noção de ortogonalidade de vetores, o produto exterior o faz para a noção de paralelismo, isto é

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \iff \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0\,,$$

em que o bivetor 0 representa a classe de equivalência dos paralelogramos degenerados. O produto exterior de vetores é claramente sobrejetivo. Por essa razão frequentemente nos referiremos a um bivetor na forma $\mathbf{B} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. A proposição a seguir nos permite calcular a norma do produto exterior a partir de seus fatores.

Proposição 2.1. *Sejam* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *vetores então:*

$$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2\,.$$

Demonstração. Suponha $\mathbf{u} \neq 0$ e seja $\mathbf{h} := \mathbf{v} - \operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$. Então $\mathbf{h}$ representa a altura, relativa a $\mathbf{u}$, do paralelogramo gerado pelos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Logo,

$$\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{h}\|^2 \tag{2.2}$$

Seja $\alpha := (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})/\|\mathbf{u}\|^2$. Então, $\operatorname{Proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \mathbf{v} - \alpha \mathbf{u}$ e

$$\begin{aligned} \|\mathbf{h}\|^2 &= \|\mathbf{v}\|^2 - 2\alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \alpha^2 \|\mathbf{u}\|^2 \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2} . \end{aligned}$$

Substituindo o valor de $\|\mathbf{h}\|^2$ na Equação 2.2, obtem-se

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 (\|\mathbf{v}\|^2 - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2}) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 , \end{aligned}$$

que é o resultado desejado. □

Exemplo 2.1. Podemos obter da proposição acima uma desigualdade muito importante, conhecida como *desigualdade de Cauchy-Schwarz.* De fato, como $\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 \geq 0$, segue da proposição que

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| .$$

Exemplo 2.2. Dado um paralelogramo $ABCD$ vamos determinar sua altura h relativa ao lado $\overline{AB}$. Podemos calcular a área do paralelogramo de duas formas $A = h \|\overrightarrow{AB}\|$ e $A = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$. Logo

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} .$$

Produto exterior de vetores por bivetores. Sejam $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ um vetor e $\mathbf{B} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ um bivetor. Podemos escolher representantes dos vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ tais $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{CC'}$. Desse modo, os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ determinam um paralelogramo orientado e, portanto, um trivetor $\mathbf{T}$, veja Figura 2.7. Definimos

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{T} .$$

Para que essa definição seja boa, é necessário mostrar que se $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{v}} \wedge \tilde{\mathbf{w}}$ então seguindo o processo anteriormente descrito, o trivetor $\tilde{\mathbf{T}}$ determinado

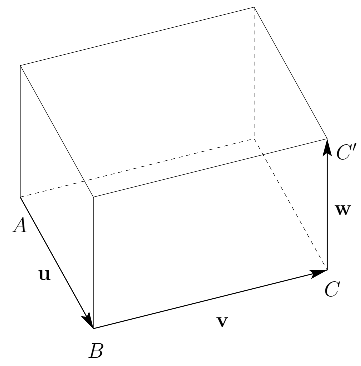

Figura 2.7: Produto exterior do vetor $\mathbf{u}$ pelo bivetor $\mathbf{B} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$.

pelos vetores $\mathbf{u}$, $\tilde{\mathbf{v}}$ e $\tilde{\mathbf{w}}$ é igual a $\mathbf{T}$. Intuitivamente, podemos deformar o par de vetores $\mathbf{v}\,, \mathbf{w}$ no par de vetores $\tilde{\mathbf{v}}\,, \tilde{\mathbf{w}}$ sem alterar o bivetor $\mathbf{B}$ e, portanto, sem alterar o trivetor $\mathbf{T}$ e, portanto, $\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}}$. Mostraremos aqui que eles possuem o mesmo volume, a demonstração de que também possuem a mesma orientação é feita no Apêndice. Seja $\boldsymbol{\pi}$ o plano que passa pelo ponto B na direção do bivetor $\mathbf{B}$ e seja $h = \operatorname{dist}(A, \boldsymbol{\pi})$, então

$$\|\mathbf{T}\| = h\|\mathbf{B}\| = \|\mathbf{T}'\|\,.$$

O produto de um bivetor por um vetor se define analogamente. Segue-se imediatamente das definições que, quaisquer que sejam o número real α, os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e o bivetor $\mathbf{B}$, valem as seguintes igualdades:

E1' *Homogeneidade:* $\alpha(\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) = (\alpha\mathbf{u}) \wedge \mathbf{B} = \mathbf{u} \wedge (\alpha\mathbf{B})$;

E2' *Comutatividade:* $\mathbf{u} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{u}$;

E3 *Associatividade:* $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$;

E4 Se o vetor $\mathbf{w}$ é ortogonal ao plano de $\mathbf{B}$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} &= \operatorname{Proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}) \wedge \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \wedge \mathbf{u} &= \mathbf{B} \wedge \operatorname{Proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

2.3 Adição de Bivetores e Trivetores.

Gostaríamos de definir uma noção de adição de bivetores (e de trivetores) como fizemos para os vetores. Assim como a noção de orientação, a noção de adição de bivetores não é tão imediata. Isso acontece porque diferentemente dos vetores, os bivetores não têm uma forma rigidamente definida: podemos deformar a vontade um paralelogramo orientado sobre o plano que o contém, desde que não alteremos sua área e sua orientação, sem que o bivetor correspondente se altere. Para definir $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ vamos considerar separadamente os casos em que os bivetores são: (a) paralelos; e (b) não-paralelos.

Antes de passarmos às definições, estudaremos as soluções, na incógnita $\mathbf{x}$, da equação

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{v}. \tag{2.3}$$

Seja $\mathbf{h}$ o vetor altura em relação à base $\mathbf{v}$. Então $\mathbf{h} = \mathbf{u} - \mathrm{Proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathrm{Proj}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{x}$. Logo, $\mathbf{x} - \mathbf{u} = \mathrm{Proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x} - \mathbf{u})$. Portanto, $\mathbf{x} - \mathbf{u}$ é paralelo a $\mathbf{v}$, isto é, as soluções da Equação 2.3 são o vetores

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}$$

em que o número real λ é um parâmetro.

Adição de bivetores não-paralelos. Sejam $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ planos em que os bivetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ possuem representantes. Esses planos são não-paralelos e, obviamente, não-coincidentes, logo eles se interceptam segundo uma reta $\mathbf{r}$. Sejam B e E dois pontos distintos nessa reta. Seja A um ponto em α e F um pontos em $\boldsymbol{\beta}$ tais que: $\mathbf{A} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BE}$ e $\mathbf{B} = \overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{BC}$. Coloquemos $\mathbf{a} := \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} := \overrightarrow{BC}$ e $\mathbf{c} := \overrightarrow{BE}$. Então,

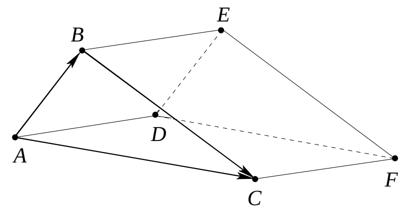

Figura 2.8: Adição de bivetores.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} \\ \mathbf{B} &= (-\mathbf{c}) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}\,. \end{aligned}$$

Definimos

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} := (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}\,.$$

Uma vez que existem diversas maneiras de representar o bivetor $\mathbf{A}$ (e $\mathbf{B}$) na forma $\mathbf{A} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, é necessário mostrar que a adição de bivetores não depende de uma representação particular, isto é, precisamos mostrar que

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} \\ \mathbf{B} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \end{aligned}\right\} \implies (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$$

De fato, nesse caso o vetor $\mathbf{w}$ possui representante na reta $\mathbf{r}$. Logo $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{c}$, para algum número real α. Pelas propriedades do produto por número real, temos

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{u} \wedge (\alpha\mathbf{c}) = (\alpha\mathbf{u}) \wedge \mathbf{c}$$

Logo, $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{a} + \lambda'\mathbf{c}$. Similarmente, $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{b} + \lambda''\mathbf{c}$. Portanto,

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} &= (\alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) \wedge \mathbf{c} \\ &= \big[\mathbf{a} + \mathbf{b} + (\lambda' + \lambda'')\mathbf{c}\big] \wedge \mathbf{c} \\ &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}\,.\end{aligned}$$

Conclui-se que a adição de bivetores está bem definida nesse caso.

Adição de bivetores paralelos. Seja $\boldsymbol{\pi}$ um plano em que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ possuam representantes e seja $\mathbf{i}$ um bivetor de norma um nesse plano. Então, existem números reais α e β tais que $\mathbf{A} = \alpha\mathbf{i}$ e $\mathbf{B} = \beta\mathbf{i}$. Defina

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} := (\alpha + \beta)\mathbf{i}\,.$$

Se $\mathbf{i}'$ é outro bivetor de norma um diferente de $\mathbf{i}$, então $\mathbf{i}' = -\mathbf{i}$. Daí segue-se, facilmente, que a adição de bivetores está bem definida também nesse caso. Estamos agora aptos a enunciar a terceira propriedade do produto exterior de bivetores: para todos bivetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vale

E5 *Distributividade:* $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}\,.$

Se os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ não são coplanares essa propriedade segue da definição de adição de bivetores. Deixamos para o leitor verificar que ela continua válida se os três vetores forem coplanares.

Adição de trivetores. A adição de trivetores dá-se de forma similar à adição de bivetores paralelos: se $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ são trivetores e $\mathbf{I}$ é um trivetor unitário, então, existem números α e β tais que $\mathbf{A} = \alpha\mathbf{I}$ e $\mathbf{B} = \beta\mathbf{I}$. Define-se

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} := (\alpha + \beta)\mathbf{I}$$

A adição e bivetores e o produto de número real por bivetor gozam das seguintes propriedades:

A1 $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$;

A2 $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$;

A3 $\mathbf{A} + 0 = 0 + \mathbf{A} = \mathbf{A}$;

A4 $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = -\mathbf{A} + \mathbf{A} = 0$;

M1 $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$;

M2 $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$;

M3 $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$;

M4 $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

As propriedades acima também são válidas para a adição de trivetores e produto de número real por trivetor. As demonstrações envolvendo trivetores seguem imediatamente das definições e das propriedades similares de números reais. Para bivetores, elas também são fáceis de mostrar, exceto pela segunda propriedade que é um pouco mais sutil. Por isso, apresentaremos apenas a demonstração da segunda propriedade para bivetores. Para isso, é interessante que se mostre antes que para quaisquer vetor $\mathbf{u}$ e bivetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, vale

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{A} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}$$

De fato, suponha que $\mathbf{A} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{a}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{b}$. Então $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{v} \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ e, portanto, $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Seja $\mathbf{w}$ um vetor ortogonal ao plano de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. Se $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{w}$ e $\mathbf{b} = \beta\mathbf{w}$, então

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \wedge (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\
&= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge (\alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{w}) \\
&= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \big[(\alpha + \beta)\mathbf{w}\big] \\
&= (\alpha + \beta)\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \\
&= \alpha\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} + \beta\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \\
&= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge (\alpha\mathbf{w}) + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge (\beta\mathbf{w}) \\
&= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{b} \\
&= \mathbf{u} \wedge \mathbf{A} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}
\end{aligned}$$

Em consequência, tem-se em geral

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \wedge (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\
&= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathrm{Proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\
&= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \big(\mathrm{Proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{a}) + \mathrm{Proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{b})\big) \\
&= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathrm{Proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{a}) + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathrm{Proj}_{\mathbf{w}}(\mathbf{b}) \\
&= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{b} \\
&= \mathbf{u} \wedge \mathbf{A} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}
\end{aligned}$$

Daí segue-se facilmente que $\mathbf{u} \wedge \mathbf{A} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}$, para todo $\mathbf{u}$, então $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Mostraremos agora que $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$. De fato, todo vetor

$\mathbf{u}$, vale

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\wedge\big[\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})\big]&=\mathbf{u}\wedge\mathbf{A}+\mathbf{u}\wedge(\mathbf{B}+\mathbf{C})\\&=\mathbf{u}\wedge\mathbf{A}+(\mathbf{u}\wedge\mathbf{B}+\mathbf{u}\wedge\mathbf{C})\\&=(\mathbf{u}\wedge\mathbf{A}+\mathbf{u}\wedge\mathbf{B})+\mathbf{u}\wedge\mathbf{C}\\&=\mathbf{u}\wedge(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{u}\wedge\mathbf{C}\\&=\mathbf{u}\wedge\big[(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}\big]\end{aligned}$$

em que a terceira igualdade decorre da propriedade associativa para a adição de trivetores. Logo, a propriedade associativa também vale para a adição de bivetores.

2.4 O Produto Exterior e Bases Ortonormais.

Com o objetivo de entendermos melhor a estrutura do produto exterior faremos uma análise do que o ocorre em um plano. Seja $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ uma base ortonormal para um dado plano $\boldsymbol{\pi}$. Desta forma, para quaisquer dois vetores $\mathbf{u}=u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v}=v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2$ em $\boldsymbol{\pi}$ temos

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}&=(u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2)\wedge(v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2)\\&=u_1v_1\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1+u_1v_2\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2+u_2v_1\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1+u_2v_2\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_2\\&=(u_1v_2-u_2v_1)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Este resultado, decorrente apenas das propriedades do produto exterior, é totalmente esperado, isto é, o bivetor resultante do produto exterior entre dois vetores quaisquer do plano $\boldsymbol{\pi}$ é um múltiplo do bivetor gerado pela base. Uma análise rápida nos mostra que o número real que aparece como coeficiente do bivetor $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2$ é , a menos de um sinal, a medida da área determinada pelos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. De fato, segue da definição de multiplicação de bivetor por número real que

$$\|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\|=\|(u_1v_2-u_2v_1)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\|=|u_1v_2-u_2v_1|\|\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\|$$

e $\|\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\|=1$, já que a base é ortonormal. Já o sinal do número $u_1v_2-u_2v_1$ nos diz se o bivetor $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ e $\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2$ possuem a mesma orientação. A quantidade $u_1v_2-u_2v_1$ associada ao produto exterior aparece mais comumente no estudo de matrizes. Na verdade ela é exatamente o determinante

$$\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}.$$

Analisaremos agora o produto exterior em termos de uma base ortonormal de V. Para simplificar as equações, usaremos a notação

$$\begin{aligned}\mathbf{i} &= \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{j} &= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{k} &= \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 .\end{aligned} \tag{2.4}$$

Sejam $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ vetores arbitrários. Calculando o produto exterior entre eles, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) \wedge (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) \\ &= u_1v_1\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 + u_1v_2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + u_1v_3\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \\ &\quad + u_2v_1\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 + u_2v_2\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 + u_2v_3\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\ &\quad + u_3v_1\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 + u_3v_2\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 + u_3v_3\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3 \,.\end{aligned}$$

Substituindo as Relações (2.4) juntamente com $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i = 0$ no último membro da equação acima e agrupando os termos comuns, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= (u_3v_2 - u_2v_3)\mathbf{i} + (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_2v_1 - u_1v_2)\mathbf{k} \\ &= \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k} \,.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Portanto, os elementos $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ geram o espaço dos bivetores. É possível obter o módulo de $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ a partir dos coeficientes α, β, e γ, veja Exercício 2.2.

Exemplo 2.3. Considere um sistema de coordenadas $\{O, \boldsymbol{\beta}\}$ para o espaço E. Utilizando o produto exterior e esse sistema de coordenadas obteremos uma expressão para a área de um triângulo ABC em função das coordenadass de seus vértices. De fato, a área pode ser calculada como $A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$. Sabemos que as coordenadas de um ponto $P(x, y, z)$ de E são tais que $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{v_1} + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$, além disso, para qualquer segmento orientado tem-se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Do que acaba de ser exposto e com as propriedades do produto exterior tem-se

$$A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}\|.$$

Ainda no contexto de uma base ortonormal para V, usaremos para o produto exterior dos vetores dessa base, a notação $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$. Assim, temos as seguintes relações entre produtos exteriores

$$\mathbf{I} = -\mathbf{i} \wedge \mathbf{e}_1 = -\mathbf{j} \wedge \mathbf{e}_2 - \mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_3 \,.$$

Se $\mathbf{w} = w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3$, então

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\wedge\mathbf{w} &= \big[(u_3v_2 - u_2v_3)\mathbf{i} + (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_2v_1 - u_1v_2)\mathbf{k}\big] \\ &\qquad \wedge (w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 + w_3\mathbf{e}_3) \\ &= [\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]\mathbf{I}\,,\end{aligned}$$

em que

$$[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}] := (u_2v_3 - u_3v_2)w_1 - (u_1v_3 - u_3v_1)w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)w_3\,.$$

O número $[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]$, que é a menos do sinal a norma do trivetor $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ ou ainda o volume do paralelepípedo de determinado pelos vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, é imediatamente reconhecido como sendo o determinante

$$[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}\,.$$

Exemplo 2.4. Todo ponto P de E fica determinado pelo vetor posição $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$, ou seja, a tripla ordenada $P(x,y,z)$ determina a posição de P. Determinaremos a relação entre as coordenadas para que um ponto $P(x,y,z)$ pertença a um plano $\boldsymbol{\pi}$ gerado por $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ e que passa pelo ponto $A(1,1,1)$. Sabemos que se P pertence a $\boldsymbol{\pi}$ então $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\wedge\overrightarrow{AP} = \mathbf{0}$, por outro lado $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\wedge\overrightarrow{AP} = [\mathbf{u},\mathbf{v},\overrightarrow{AP}]\mathbf{I},$. Logo devemos ter $[\mathbf{u},\mathbf{v},\overrightarrow{AP}] = 0$, isto é,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ x-1 & y-1 & z-1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Executando os cálculos, temos

$$-3x + 2y + 2z - 4 = 0.$$

Exemplo 2.5. Podemos usar o produto exterior para determinar se um dado vetor $\mathbf{v}$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Se $\mathbf{v} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$ então

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3 &= x\,\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}_3 &= y\,\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v} &= z\,\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3\,.\end{aligned}$$

Essas equações parecem pedir a divisão dos primeiros membros pelo fator $\mathbf{v}_1\wedge\mathbf{v}_2\wedge\mathbf{v}_3$, mas não podemos fazê-lo pois esse fator não é um número –

veremos nos capítulos seguintes como tornar isso possível. Por enquanto, contornaremos a situação observando que cada um dos produtos exteriores que ocorrem nas equações acima são múltiplos do mesmo trivetor unitário $\mathbf{I}$, logo

$$\begin{aligned}
[\mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] &= x\,[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] \\
[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}, \mathbf{v}_3] &= y\,[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] \\
[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}] &= z\,[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]\,.
\end{aligned}$$

Esse método é conhecido como *Regra de Cramer.*

Exemplo 2.6. O determinante de uma matriz $A_{3\times 3}$ qualquer pode ser definido da seguinte forma: fazendo

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{v}_2 &= a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{23}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{v}_3 &= a_{31}\mathbf{e}_1 + a_{32}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

definimos $\det A := [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$. Pode-se provar todas as propriedades do determinante a partir das propriedades de produto exterior. Vejamos, por exemplo, como provar que $\det(BA) = \det B \det A$. Defina os vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ como antes e também

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= b_{11}\mathbf{v}_1 + b_{12}\mathbf{v}_2 + b_{13}\mathbf{v}_3 \\
\mathbf{u}_2 &= b_{21}\mathbf{v}_1 + b_{22}\mathbf{v}_2 + b_{23}\mathbf{v}_3 \\
\mathbf{u}_3 &= b_{31}\mathbf{v}_1 + b_{32}\mathbf{v}_2 + b_{33}\mathbf{v}_3\,.
\end{aligned}$$

Dai segue que

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 &= \det B\, \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3 \\
&= \det B \det A\, \mathbf{I}.
\end{aligned}$$

Agora substituindo as expressões dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ nas equações acima, teremos os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ escritos como combinação linear dos vetores da base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, em que os coeficientes de cada um deles serão as entradas das linhas da matriz produto BA, logo $\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 = \det(BA)\,\mathbf{I}$. Comparando os dois resultados obtidos para o produto exterior dos vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ temos $\det(BA) = \det B \det A$.

O produto exterior permite uma interpretação muito mais interessante para o conceito de determinante, que normalmente é utilizado apenas como ferramenta auxiliar na resolução de sistemas de equações lineares. Sua relação com os conceitos de área e volume faz-se clara, tornando seu estudo muito mais natural e atraente. As propriedades de determinantes podem ser provadas a partir das propriedades do produto exterior, inclusive para matrizes de ordem maior que três.

Exercícios

2.1. Mostre a *desigualdade triângular*: se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores, então

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \,.$$

2.2. Use a Proposição 2.1 para mostrar que para vetores $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, vale

$$\|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \,,$$

em que $\alpha = u_3v_2 - u_2v_3,\ \beta = u_1v_3 - u_3v_1$ e $\gamma = u_2v_1 - u_1v_2\,.$

2.3. Sejam $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ mostre que o produto exterior entre eles pode ser calculado simbolicamente como

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = -\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \,.$$

2.4. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores não-nulos e θ o ângulo entre eles. Mostre que $|\cos\theta| \leq 1\,.$

2.5. Interprete o sistema abaixo como uma combinação linear de vetores do espaço V e resolva-o utilizando o produto exterior.

$$\begin{cases} 2x + \ \ y - 3z = \ \ 1 \\ \ \ x - 2y + \ \ z = -1 \\ 3x - \ \ y + 2z = \ \ 0\,. \end{cases}$$

2.6. Mostre que a área de um polígono $A_1A_2A_3\ldots A_n$ de n vértices pode ser calculada por

$$A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{OA_1}\wedge\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_2}\wedge\overrightarrow{OA_3} + \cdots + \overrightarrow{OA_n}\wedge\overrightarrow{OA_1}\| \,.$$

2.7. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores linearmente independentes. Mostre que o conjunto solução da equação $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{x} = 0$ é o plano gerado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

2.8. Discuta o que podemos esperar do produto $\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_4$ para vetores.

2.9. Mostre que o volume do tetraedro determinado pelos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ é dado por $V = \frac{1}{6}\|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3\|$.

2.10. Mostre que se $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} \perp \mathbf{w}$, então toda reta que possui um representante de $\mathbf{u}$ é ortogonal a todo plano que contem uma representante de $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$.

2.11. Mostre que se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ e $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0$, então ou $\mathbf{u} = 0$ ou $\mathbf{v} = 0$.

2.12. Mostre que $\det A^T = \det A$, em que A é uma matriz 3×3.

2.13. Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vetores e A, B matrizes definidas por $a_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{e}_j$ e $b_{kl} = \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_l$, respectivamente. Mostre que $B = A^T A$ e conclua que $||\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3||^2 = \det B$. Este exercício generaliza o resultado da proposição 2.1 para trivetores.

Nos próximos exercícios considere um sistema de coordenadas cartesianas fixo para E.

2.14. Determine a área do triângulo determinado pelos pontos $A(1, 2, -1)$, $B(0, -2, 4)$ e $C(-3, 1, 1)$. Determine o comprimento da maior altura relativa.

2.15. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ tais que $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = 3$ e $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = 4$. Calcule a área do triângulo ABC sabendo que $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ e $\overrightarrow{AC} = \mathbf{u} - 4\mathbf{v}$.

2.16. Os pontos $A(0, 0, 0)$, $B(1, 4, 3)$, $C(1, 2, 2)$ e $D(1, 0, 1)$ são os vértices de um tetraedro. Calcule:

a) O volume do tetraedro;

b) A área da face que não contem o vértice D;

c) A altura relativa ao vértice D.

2.17. Dados os vetores $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ determine uma base ortonormal a partir deles e encontre as coordenadas do vetor $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$ nessa base.

2.18. Determine o volume do tetraedro determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ e $\overrightarrow{AC} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ e encontre a altura relativa ao vértice A.

Capítulo 3

A Álgebra Geométrica do Plano

Para construir o produto geométrico precisamos estender o conjunto de vetores de modo a agrupar números, vetores, bivetores e trivetores em um único elemento. Faremos isso por partes, começaremos agrupando números, vetores e bivetores, pois isso será suficiente para o estudo da geometria dos planos. Seja $\boldsymbol{\pi}$ um plano, para cada terno $\alpha, \mathbf{u}, \mathbf{A}$ em que α é um número real, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{A}$ são um vetor e um bivetor de $\boldsymbol{\pi}$, definimos um novo elemento

$$\mathbf{R} := \alpha + \mathbf{u} + \mathbf{A}\,.$$

Indicaremos o conjunto de todos esses elementos por $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(\boldsymbol{\pi})$. O produto geométrico será definido para objetos desse conjunto. Os elementos de $\mathcal{A}_2$ devem ser entendidos como objetos contendo três informações: uma numérica, uma vetorial e uma bivetorial. Poderíamos representar tais objetos pela tripla ordenada $(\alpha, \mathbf{u}, \mathbf{A})$, contudo , como veremos a seguir, a notação de adição, mesmo sendo apenas formal, torna mais confortável a manipulação do produto geométrico entre eles. Esse conjunto possui uma estrutura natural de espaço vetorial definida por: se λ é um número real e $\mathbf{S} := \beta + \mathbf{v} + \mathbf{B}$, então

$$\mathbf{R} + \mathbf{S} := (\alpha + \beta) + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (\mathbf{A} + \mathbf{B})$$

e

$$\lambda\mathbf{R} := \lambda\alpha + \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{A}$$

3.1 O Produto Geométrico

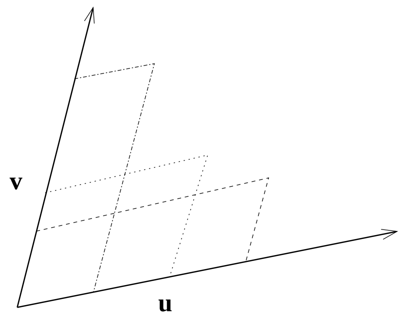

Figura 3.1: Diferentes possibilidades para um paralelogramo de lados $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, conhecido o produto geométrico $\mathbf{uv}$: a área e os ângulos ficam determinados.

Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores, definimos o produto geométrico entre eles por

$$\mathbf{uv} := \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$$

O produto geométrico de dois vetores do plano, portanto, não é um novo vetor do plano, mas um elemento de $\mathcal{A}_2$ formado por duas componentes em que a primeira é o número real $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e segunda é o bivetor $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. Essas duas componentes codificam a área e, se uma orientação particular do plano foi escolhida, o ângulo orientado entre os lados do paralelogramo orientado determinado pelos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Portanto, para determinar completamente esse paralelogramo, a menos de um movimento rígido do plano, é suficiente conhecer a proporção entre seus lados, veja Figura 3.1.

O produto geométrico e vetores é homogêneo e distributivo, isto é, para todos número real λ e vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, valem:

G1 $(\lambda\mathbf{u})\mathbf{v} = \mathbf{u}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{uv})$;

G2 $\mathbf{u}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{uv} + \mathbf{uw}$;

G3 $(\mathbf{u} + \mathbf{v})\mathbf{w} = \mathbf{uw} + \mathbf{vw}$.

Em geral o produto geométrico de dois vetores não comuta uma vez que $\mathbf{uv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ pode ser diferente de $\mathbf{vu} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. Note que para $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são ortonormais, têm-se

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \,.$$

Um análise rápida das expressões para $\mathbf{uv}$ e $\mathbf{vu}$ permite reescrever os produto interno e exterior em termos do produto geométrico:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{uv} + \mathbf{vu})$$

e

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{uv} - \mathbf{vu}),$$

de que se pode concluir que $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v} \iff \mathbf{uv} = \mathbf{vu}$ e $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \iff \mathbf{uv} = -\mathbf{vu}$.

Queremos estender o produto geométrico de vetores do plano $\boldsymbol{\pi}$ a todos os elementos de $\mathcal{A}_2$ de modo a manter as propriedades distributivas e homogênea desses. Para isso, basta definir os produtos de qualquer par de elementos, não-simultaneamente vetores, do conjunto $\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\}$ (o produto de dois vetores já está definido), pois uma vez que esses produtos forem definidos, as propriedade de distributividade e homogeneidade implicam que, em verdade, todos os produtos foram de fato definidos. Há, portanto, muitas possibilidades para estender o produto geométrico de vetores. Entretanto, se exigirmos que esse produto seja também associativo e que o número real 1 aja, ordinariamente, como unidade, isto é, o produto geométrico de um número real por um elemento de $\mathcal{A}_2$ é simplesmente a multiplicação por número real nesse espaço vetorial, então a extensão do produto geométrico para $\mathcal{A}_2$ é única. A Tabela 3.1 resume o produto geométrico para um conjunto ortonormal de geradores de $\mathcal{A}_2$.

Como exemplos, analisaremos o produto geométrico entre alguns elementos que merecem destaque.

Produto de um vetor por si mesmo. Se $\mathbf{u}$ é um vetor, então por definição

$$\mathbf{u}^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2.$$

Produto de um vetor por um bivetor. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{B}$ um vetor e um bivetor, respectivamente, com representantes em $\boldsymbol{\pi}$. Então, existe um vetor $\mathbf{v}$ ortogonal a $\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{B} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. A ortogonalidade entre $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ implica $\mathbf{uv} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$. Então,

$$\mathbf{uB} = \mathbf{u}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u}(\mathbf{uv}) = \|\mathbf{u}\|^2\mathbf{v}$$

logo $\mathbf{uB}$ é um vetor paralelo ao vetor $\mathbf{v}$ e, portanto ortogonal, ao vetor $\mathbf{u}$. Além disso

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{uB}) = \|\mathbf{u}\|^2\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|^2\mathbf{B}$$

de que se conclui que, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{B}$ são não-nulos, então $\{\mathbf{u}, \mathbf{uB}\}$ é uma base ortogonal com a mesma orientação de $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$
1	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	1	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$	1	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	-1

Tabela 3.1: Tábua de produtos geométricos para geradores ortonormais de $\mathcal{A}_2$.

Produto de um bivetor por si mesmo. Seja $\mathbf{B} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ um bivetor, então

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^2 &= (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2 = -(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) \\
&= -(\mathbf{uv} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{vu} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \\
&= -\mathbf{uv}^2\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{uv} + \mathbf{vu}) \\
&= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - \mathbf{u}^2\mathbf{v}^2 = -\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|^2 \\
&= -\|\mathbf{B}\|^2,
\end{aligned}$$

em que a sexta igualdade decorre da Proposição 2.1. Daí tiramos duas identidades interessantes:

$$\mathbf{B}^2 = -\|\mathbf{B}\|^2$$

e

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = \mathbf{u}^2\mathbf{v}^2 + (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})^2 .$$

A primeira identidade informa, em particular, que se $\mathbf{B}$ é unitário, então $\mathbf{B}^2 = -1$, isto é, $\mathbf{B}$ goza da propriedade da unidade imaginária. A segunda identidade é a Proposição 2.1 reescrita em termos do produto geométrico de bivetores.

Elementos inversíveis. Um elemento $\mathbf{S}$ de $\mathcal{A}_2$ é dito inversível se existe um elemento $\mathbf{S}^{-1}$ em $\mathcal{A}_2$ tal que $\mathbf{SS}^{-1} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{S} = 1$. Se $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$ comutam e $\mathbf{S}$ é inversível, então o mesmo acontece com $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}^{-1}$. Nesse caso podemos escrever

$$\mathbf{RS}^{-1} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{R} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{S}}$$

mas, atenção, em geral isso não é possível. A álgebra $\mathcal{A}_2$ possui muitos elementos inversíveis. Em particular são inversíveis os vetores e bivetores não-nulos com elementos inversos

$$\mathbf{u}^{-1} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}^{-1} = -\frac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|^2},$$

respectivamente.

Exemplo 3.1. Os elementos da forma $\mathbf{u}+\mathbf{B}$, em que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{B}$ são unitários, não são inversíveis, pois

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}+\mathbf{B})(\mathbf{u}+\mathbf{B}) &= \mathbf{u}^2 + \mathbf{uB} + \mathbf{Bu} + \mathbf{B}^2 \\ &= \mathbf{uB} + \mathbf{Bu} \\ &= \mathbf{uB} - \mathbf{uB} \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Em gerla geral os elementos inversíveis permitem que algumas equações possam ser resolvidas facilmente, como podemos notar no

Exemplo 3.2. A solução da equação $\mathbf{Bx} + \mathbf{u} = 0$ é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}&\mathbf{Bx} + \mathbf{u} = 0 \\ &\mathbf{Bx} = -\mathbf{u} \\ &\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{Bx}) = \mathbf{B}^{-1}(-\mathbf{u}) \\ &\mathbf{x} = \frac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|^2}\mathbf{u}\,.\end{aligned}$$

3.2 Números Complexos

Vimos que os bivetores $\mathbf{i}$ correspondentes aos paralelogramos orientados de área um gozam da propriedade da unidade imaginária: $\mathbf{i}^2 = -1$. Podemos, portanto, interpretar o conjunto $\mathbb{R}[\mathbf{i}] = \{\mathbf{U} \mid \mathbf{U} = \alpha + \beta\mathbf{i};\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{A}_2$ como uma cópia do conjuntos dos números complexos naturalmente contida em $\mathcal{A}_2$.

A *unidade imaginária* $\mathbf{i}$ goza das seguintes propriedades: para vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\boldsymbol{\pi}$ vale

C1 $\mathbf{vi}$ é ortogonal a $\mathbf{v}$;

C2 $\mathbf{vi} = -\mathbf{iv}$;

C3 $\|\mathbf{v}\mathbf{i}\| = \|\mathbf{v}\|$;

C4 $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v}\mathbf{i}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{i}$;

C5 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v}\mathbf{i}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})\mathbf{i}$.

As propriedades **C1**, **C2** e **C3** indicam que as multiplicações de um vetor $\mathbf{u}$ por $\mathbf{i}$, à direita ou à esquerda, geram vetores ortogonais à $\mathbf{u}$ preservando-lhe a norma. As propriedades **C2**, **C4** e **C5** indicam como operar com $\mathbf{i}$ na álgebra $\mathcal{A}_2$, em particular, **C2** implica que $\mathbf{u}\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}}\mathbf{u}$ qualquer que sejam o vetor $\mathbf{u}$ e o complexo $\mathbf{U} = \alpha + \beta\mathbf{i}$. Note que, a multiplicação por $\mathbf{i}$ permite obter uma base ortogonal $\{\mathbf{u}, \mathbf{u}\mathbf{i}\}$ do plano $\boldsymbol{\pi}$ a partir de um único vetor não-nulo $\mathbf{u}$.

Exemplo 3.3. Considere uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ para um plano $\boldsymbol{\pi}$. Neste caso a multiplicação do bivetor $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ por um vetor arbitrário $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$ fornece

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\mathbf{i} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \\ &= u_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + u_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \\ &= -u_2\mathbf{e}_1 + u_1\mathbf{e}_2 \,. \end{aligned}$$

Em termos de coordenadas, a multiplicação por $\mathbf{i}$ transforma o vetor $(u_1, u_2)^T$ no vetor $(-u_2, u_1)^T$.

3.3 Pontos e Retas no Plano.

Nesta seção trataremos de algumas relações entre pontos e retas e também entre retas e retas de um mesmo plano.

Equações da reta (Pertinência de um ponto a uma reta.) Uma reta fica determinada por dois pontos distintos, digamos A e B. Um terceiro ponto, digamos X, está sobre essa reta, se e somente se os vetores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{AB}$ são linearmente dependentes, isto é, existe um número real t tal que

$$\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB} \,. \tag{3.1}$$

A equação acima é chamada de equação paramétrica da reta determinada pelos pontos A e B. De acordo com essa equação, determinar se um ponto ponto P pertence à reta determinada por A e B equivale a resolver a equação$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ para t. Veremos a seguir que essa tarefa pode ser realizada sem referência ao parâmetro.

Uma reta também é frequentemente determinada por um ponto e sua direção ou por um ponto e uma direção normal e ela. Esses são, por exemplo, os casos em que somos inquiridos a determinar uma reta conhecidos um de seus pontos e uma reta paralela ou uma reta ortogonal a ela. A direção de uma reta ou uma direção normal a ela são naturalmente codificados por meio de vetores, por exemplo, se a reta é determinada pelo pontos A e B como acima, o vetores $\mathbf{d} := \overrightarrow{AB}$ e $\mathbf{n} = \mathbf{di}$ codificam sua direção e a direção normal a ela, respectivamente. A Equação (3.1), portanto, é equivalente à equação

$$\mathbf{d} \wedge \overrightarrow{AX} = 0$$

que é a equação cartesiana da reta. Uma direção $\mathbf{d}$ e uma direção normal a ela $\mathbf{n}$ estão relacionadas por $\mathbf{n} \propto \mathbf{di}$ e $\mathbf{d} \propto \mathbf{in}$. Assim, para se passar de uma direção da reta à uma direção normal, e vice-versa, é suficiente multiplicar a direção conhecida pelo bivetor $\mathbf{i}$. Para verificar se um determinado ponto P pertence à uma reta cuja equação é $\mathbf{d} \wedge \overrightarrow{AX} = 0$ basta calcular $\mathbf{d} \wedge \overrightarrow{AP}$.

Exemplo 3.4. Representaremos a reta $\mathbf{d} \wedge \overrightarrow{AP} = 0$, através do produto interno. Usando a propriedade complexa de $\mathbf{i}$, tem-se

$$(\mathbf{di}) \cdot \overrightarrow{AX} = (\mathbf{d} \wedge \overrightarrow{AX})\mathbf{i} = 0\,,$$

logo, $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AX} = (\mathbf{di}) \cdot \overrightarrow{AX} = 0$.

Exemplo 3.5. Considere um sistema de coordenadas cartesianas para o plano $\boldsymbol{\pi}$ de forma que $A(x_0, y_0)$ e $\mathbf{d} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$. Então,

$$\mathbf{d} \wedge \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} a & b \\ x - x_0 & y - y_0 \end{vmatrix} \mathbf{i}$$

Logo, em coordenadas, a equação da reta $\mathbf{r}$ determinada por A e $\mathbf{d}$ é

$$\begin{vmatrix} a & b \\ x - x_0 & y - y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

da qual, em se fazendo $c = bx_0 - ay_0$, obtém-se

$$-bx + ay + c = 0\,.$$

Note que o vetor normal à reta pode ser identificado na equação, $\mathbf{n} = -b\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2$ é, claramente, a rotação em $90°$ do vetor direção $\mathbf{d}$.

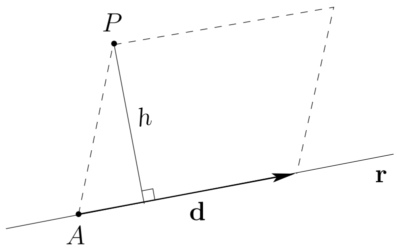

Figura 3.2: A distância do ponto P à reta $\mathbf{r}$ é igual a altura h do paralelogramo de lados AP e $\mathbf{d}$.

Distância de um ponto a uma reta. Sejam $\mathbf{r}$ uma reta como anteriormente e P um ponto. De acordo a com a definição de produto exterior, a norma de $\mathbf{d} \wedge \overrightarrow{AP}$ é a área de (qualquer) um paralelogramo determinado por $\overrightarrow{AP}$ e $\mathbf{d}$. Se tomarmos $\|\mathbf{d}\|$ como a medida da base desse paralelogramo, teremos $\|\mathbf{d} \wedge \overrightarrow{AP}\| = \|\mathbf{d}\|h$, em que h é altura do paralelogramo, isto é, $\operatorname{dist}(P, \mathbf{r}) = h$. Daí se conclui que

$$\operatorname{dist}(P, \mathbf{r}) = \frac{\|\mathbf{d} \wedge \overrightarrow{AP}\|}{\|\mathbf{d}\|}\,.$$

Exemplo 3.6. Seja $\mathbf{r}$ como no exemplo anterior e $P(x_1, y_1)$. Então,

$$\mathbf{d} \wedge \overrightarrow{AP} = -bx_1 + ay_1 + c\,.$$

Logo, a expressão em coordenadas cartesianas para a distância entre P e $\mathbf{r}$ é

$$\operatorname{dist}(P, \mathbf{r}) = \frac{|-bx_1 + ay_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Posições relativas entre duas retas. Suponha que são dadas duas retas de equações $\overrightarrow{AX} \wedge \mathbf{a} = 0$ e $\overrightarrow{BY} \wedge \mathbf{b} = 0$. Queremos determinar a posição relativa entre elas (coincidentes, paralelas, perpendiculares ou oblíquas). Para isso basta calcular $\overrightarrow{AB} \wedge \mathbf{a}$ e $\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Têm-se as seguintes correspondências:

3.1. Se $\overrightarrow{AB} \wedge \mathbf{a} = 0$ e $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$ as retas são coincidentes;

3.2. Se $\overrightarrow{AB} \wedge \mathbf{a} \neq 0$ e $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$ as retas são paralelas;

3.3. Se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ as retas são perpendiculares;

3.4. Se $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \neq 0$ e $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq 0$ as retas são oblíquas.

A correspondência $\mathbf{n} \propto \mathbf{di}$ entre os vetores direção e normal de uma reta permite reconhecer imediatamente as fórmulas equivalentes caso uma reta (ou ambas) sejam dada a partir de um vetor normal a ela.

Intersecção de duas retas. Caso as retas sejam oblíquas ou perpendiculares podemos obter a intersecção entre elas. Se um ponto P pertence a ambas as retas então $\overrightarrow{AP} \wedge \mathbf{a} = 0$ e $\overrightarrow{BP} \wedge \mathbf{b} = 0$. Então, por um lado, existe um número real t_0 tal que

$$\overrightarrow{AP} = t_0\mathbf{a}\,. \tag{3.2}$$

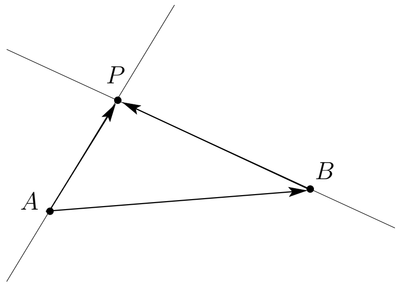

Figura 3.3: Intersecção de duas retas. O ponto P fica localizado a partir do ponto A, Equação (3.3).

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}\\ &= \overrightarrow{BA} + t_0\mathbf{a}\end{aligned}$$

logo, substituindo $\overrightarrow{BP}$ na equação da segunda reta tem-se

$$(\overrightarrow{BA} + t_0\mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = 0$$

que, resolvendo-se para t_0 e substitu-indo-se na Equação (3.2), implica

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB} \wedge \mathbf{b}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}\mathbf{a} \tag{3.3}$$

e, portanto, o ponto de intersecção das retas, P, fica localizado a partir do ponto A por meio de $\overrightarrow{AP}$. Note que a divisão no primeiro fator no membro direito da equação acima é possível, pois os bivetores comutam entre si, e o quociente é um número real. Para concretizar o método vejamos o

Exemplo 3.7. Considere um sistema de coordenadas cartesianas $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ para um plano $\boldsymbol{\pi}$. Sejam $\mathbf{r}$ a reta determinada pelo ponto $A(1,-1)$ e vetor direção $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{s}$ a reta dada por $B(1,2)$ e vetor direção $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Primeiro, note que

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \wedge (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)\\ &= 3\mathbf{i}\,,\end{aligned}$$

logo as retas são concorrentes. Determinaremos as coordenadas do ponto de interseção:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= 3\mathbf{e}_2\\ \overrightarrow{AB} \wedge \mathbf{b} &= (3\mathbf{e}_2) \wedge (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = -3\mathbf{i}\,.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\overrightarrow{AB} \wedge \mathbf{b}}{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}} = \frac{-3\mathbf{i}}{3\mathbf{i}} = -1\,.$$

Portanto,

$$\overrightarrow{AP} = -\mathbf{a} = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,.$$

Para obtermos as coordenadas do ponto P basta observar que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$, logo $P(-1,0)$.

3.4 Trigonometria

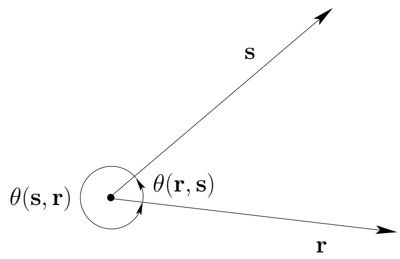

Figura 3.4: Ângulos orientado no plano.

Se fixarmos um sentido de rotação no plano $\boldsymbol{\pi}$, podemos medir ângulos no intervalo $[0, 2\pi)$. Intuitivamente, podemos convencionar que o sentido positivo de rotação é aquele que deixa o círculo à esquerda de um ponto que se move sobre a circunferência. Mais rigorosamente, em termos da Álgebra Geométrica $\mathcal{A}_2$, essa convenção equivale a escolher um bivetor unitário $\mathbf{i}$ em $\boldsymbol{\pi}$. Um ângulo medido sob esta convenção se chama *ângulo orientado* .

Funções trigonométricas . Seja $\theta = \theta(\mathbf{r},\mathbf{s})$ o ângulo orientado determinado por duas semiretas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ de origem O. Notamos que, em se tratando de ângulos orientados, $\theta(\mathbf{r},\mathbf{s}) \neq \theta(\mathbf{s},\mathbf{r})$, Figura 3.4. Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vetores unitários com representantes em $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$, respectivamente. Definimos as funções trigonométricas $\sin\theta$ e $\cos\theta$ por meio da igualdade

$$\mathbf{uv} = \cos\theta + \sin\theta\,\mathbf{i}\,.$$

As funções $\sin\theta$ e $\cos\theta$ assim definidas dependem apenas das medidas dos ângulos orientados e não dos ângulos em si mesmos. De fato, sejam $\theta(\mathbf{r},\mathbf{s})$ e $\theta'(\mathbf{r}',\mathbf{s}')$ ângulos orientados congruentes e $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}',\mathbf{v}'$ vetores unitários com representantes em $\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{r}',\mathbf{s}'$, respectivamente. Então, os paralelogramos orientados determinados pelos pares $\mathbf{u},\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}',\mathbf{v}'$ são congruentes e possuem mesma orientação. Em consequência as distâncias entre os vértices adjacentes aos ângulos congruentes também são iguais e os respectivos bivetores também são iguais, Figura 3.5. Isto é,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| &= \|\mathbf{u}'-\mathbf{v}'\| \\ \mathbf{u}\wedge\mathbf{v} &= \mathbf{u}'\wedge\mathbf{v}' \end{aligned}$$

Como todos os vetores envolvidos são unitários, a primeira igualdade permite concluir que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}'$. Portanto,

$$\begin{aligned} \cos\theta + \sin\theta\,\mathbf{i} &= \mathbf{u}\mathbf{v} \\ &= \mathbf{u}'\mathbf{v}' \\ &= \cos\theta' + \sin\theta'\,\mathbf{i}\,. \end{aligned}$$

e, consequentemente, $\cos\theta = \cos\theta'$ e $\sin\theta = \sin\theta'$.

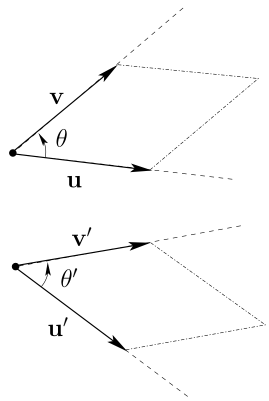

Figura 3.5: Ângulos congruentes: a distâncias entre os vertices adjacentes ao ângulo θ é igual à distância entre os vértices adjacentes ao ângulo θ' e também são iguais os paralelogramos orientados determinados pelos pares de vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{u}', \mathbf{v}'$.

A paridade das funções $\sin\theta$ e $\cos\theta$ seguem diretamente da simetria do produto interno e anti-simetria do produto externo, pois

$$\begin{aligned} \cos\theta + \sin\theta\mathbf{i} &= \mathbf{u}\mathbf{v} \\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\wedge\mathbf{v} \\ &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{v}\wedge\mathbf{u} \\ &= \cos(-\theta) - \sin(-\theta)\mathbf{i}\,. \end{aligned}$$

Portanto, $\cos(-\theta) = \cos\theta$ e $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.

As outras funções trigonométricas se definem como de costume. As propriedades da Álgebra Geométrica podem ser eficazmente utilizadas no estudo das funções trigonométricas conforme ilustram os exemplos a seguir.

Exemplo 3.8. Sabemos que a multiplicação à direita por $\mathbf{i}$ gera uma rotação em $\frac{\pi}{2}$, então para um vetor $\mathbf{u}$ unitário temos $\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{i} = \mathbf{i}$, por outro lado $\mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{i} = \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\mathbf{i}$. Portanto, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ e $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Exemplo 3.9. Mostraremos que $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$. Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vetores unitários e θ o ângulo orientado determinado por eles. Os valores de seno e cosseno de $\frac{\pi}{2} - \theta$ podem ser obtidos por

$$\begin{aligned}
\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) + \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)\mathbf{i} &= \mathbf{viu} \\
&= -\mathbf{vui} \\
&= -(\cos(-\theta) + \sin(-\theta)\mathbf{i})\mathbf{i} \\
&= \sin\theta + \cos\theta\mathbf{i}\,.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.10. *Lei dos senos.* Sejam A a área do triângulo $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}=0$ e θ_1, θ_2, θ_3 os ângulos determinados pelos pares de vetores $\mathbf{v}\,,\mathbf{u}$; $\mathbf{w}\,,\mathbf{v}$; $\mathbf{u}\,,\mathbf{w}$, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned}
2A &= \|\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\|\sin\theta_1 \\
2A &= \|\mathbf{w}\wedge\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\|\|\mathbf{v}\|\sin\theta_2 \\
2A &= \|\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{w}\|\sin\theta_3\,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\sin\theta_1}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{\sin\theta_2}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\sin\theta_3}{\|\mathbf{v}\|}\,.$$

Ângulo entre retas. Duas retas não-paralelas no plano determinam quatros ângulos, os ângulos opostos pelo vértice são congruentes e os ângulos adjacentes são complementares. Define-se como o ângulo entre as retas o menor desses ângulos. Se as retas são paralelas ou coincidentes, definimos o ângulo entre elas como sendo zero. Se as retas têm vetores direção $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ e θ é o ângulo entre elas então.

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}$$

alternativamente, se as retas não são perpendiculares,

$$\tan\theta = \frac{\|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\|}{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}$$

Para algumas aplicações, por exemplo as computacionalmente intensivas, a segunda equação pode ser mais interessante uma vez que ela só envolve adições e produtos de números reais. A equação anterior envolve também a extração de raízes quadradas.

3.5 Reflexões e Rotações

Nesta seção apresentaremos fórmulas para as transformações planares de reflexão e rotação e discutimos brevemente coordenadas polares.

Reflexões. Seja $\mathbf{d}$ uma direção, que podermos supor sem perda de generalidade ser um vetor unitário, e $\mathbf{u}$ um vetor. Se decompormos

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp}$$

em que as dua parcelas no membro direito da igualdade são as componentes paralela e ortogonal a $\mathbf{d}$, a reflexão $\mathbf{u}'$ de $\mathbf{u}$ fica caracterizada por $\mathbf{u}' = \mathbf{u}_{\parallel} - \mathbf{u}_{\perp}$, mas $\mathbf{u}_{\parallel} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{d})\mathbf{d}$. Logo,

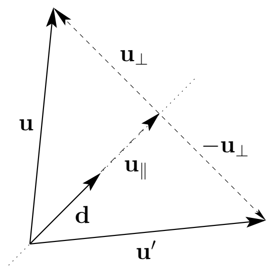

Figura 3.6: Reflexão do vetor $\mathbf{u}$ em relação à direção $\mathbf{d}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}' &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{d})\mathbf{d} - \mathbf{u}_{\perp} \\
&= 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{d})\mathbf{d} - \mathbf{u} \\
&= (\mathbf{ud} + \mathbf{du})\mathbf{d} - \mathbf{u} \\
&= \mathbf{ud}^2 + \mathbf{dud} - \mathbf{u} \\
&= \mathbf{dud}
\end{aligned}$$

em que a última igualdade decorre de $\mathbf{d}$ ser unitário.

Rotações no plano. Seja $\mathbf{u}$ um vetor não-nulo do plano $\boldsymbol{\pi}$, então como vimos na Seção 3.1 $\mathbf{u}$ e $\mathbf{ui}$ são ortogonais. Além disso, o sentido de rotação de $\mathbf{u}$ para $\mathbf{ui}$ é sempre o mesmo, uma vez que $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{ui}) = \mathbf{u}(\mathbf{ui}) = |\mathbf{u}|^2\mathbf{i}$. Se $R_\theta\mathbf{u}$ representa a rotação do vetor $\mathbf{u}$ por um tal ângulo, então

$$R_\theta\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{u} + \sin\theta\,\mathbf{ui} = \mathbf{u}(\cos\theta + \sin\theta\,\mathbf{i}) = \mathbf{u}\mathrm{e}^{\theta\mathbf{i}}$$

em que, por definição, $\mathrm{e}^{\theta\mathbf{i}} = \cos\theta + \sin\theta\,\mathbf{i}$. Se colocarmos $\mathbf{U} := \mathrm{e}^{-\frac{\theta}{2}\mathbf{i}}$, então a equação em destaque acima pode ser reescrita como

$$R_\theta\mathbf{u} = \mathbf{Uu\bar{U}} \tag{3.4}$$

em que a barra indica o complexo conjugado de $\mathbf{U}$. Reescrevemos a fórmula de rotação dessa maneira para manter compatibilidade com a fórmula de rotação no espaço. Sejam $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$ vetores unitários tais que o ângulo orientado entre eles seja $\theta/2$, então

$$\mathbf{mn} = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\,\mathbf{i} = \bar{\mathbf{U}}$$

e

$$\mathbf{nm} = \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\,\mathbf{i} = \mathbf{U}$$

Conclui-se que a Equação 3.4 reescreve-se em termos dos vetores $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$ como

$$R_\theta \mathbf{u} = \mathbf{nmumn}\,. \tag{3.5}$$

Exemplo 3.11. Utilizaremos o conceito de rotação de vetores para provar as fórmulas de adição de arcos para as funções seno e cosseno. Considere o vetor unitário $\mathbf{u}$ e duas rotações R_θ e $R_{\theta'}$. O ângulo entre $\mathbf{u}$ e $R_{\theta'}R_\theta\mathbf{u}$ é $\theta + \theta'$, logo

$$\begin{aligned} \mathbf{u}R_{\theta'}(R_\theta\mathbf{u}) &= \mathbf{uu}(\cos\theta + \sin\theta\mathbf{i})(\cos\theta' + \sin\theta'\mathbf{i}) \\ &= (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + (\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta\cos\theta')\mathbf{i}\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \theta') &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \\ \sin(\theta + \theta') &= \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\,. \end{aligned}$$

Coordenadas polares. Qualquer elemento *complexo* $\mathbf{U} = \alpha + \beta\mathbf{i}$ da álgebra $\mathcal{A}_2$ pode ser escrito na forma $\mathbf{U} = \rho^2 e^{\theta\mathbf{i}}$. Para isso basta tomar $\tan\theta = \beta/\alpha$, se $\alpha \neq 0$. Se $\alpha = 0$, então $\theta = \pi/2$. Pode-se, portanto, concluir que o produto geométrico de um vetor $\mathbf{e}_1$ por $\mathbf{U}$ corresponde a uma rotação de $\mathbf{e}_1$ pelo ângulo θ, seguida de um reescalonamento desse resultado por ρ^2. No espírito do parágrafo anterior, podemos escrever qualquer vetor $\mathbf{u}$ do plano em *coordenadas polares*

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}\mathbf{e}_1\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^2\mathbf{e}_1$$

em que $\mathbf{e}_1$ é um vetor unitário, mantido constante, e $\mathbf{U} = \rho\mathbf{e}^{-\frac{\theta}{2}\mathbf{i}}$.

3.6 Problema de Dois Corpos

Nesta seção, como aplicação dos conceitos discutidos até agora, consideramos o problema clássico de classificar as órbitas da equação diferencial

$$m\mathbf{x}'' = -\mu\frac{\mathbf{x}}{r^3} \tag{3.6}$$

em que $r = |\mathbf{x}|$. Essa equação surge no modelo newtoniano de interação gravitacional entre dois corpos. Em particular, no caso em que a massa de um deles é muito maior que a massa m do outro, a origem do sistema de coordenadas pode ser tomada como o centro de massa do corpo de massa maior, Figura 3.7. Esse é por exemplo o caso do Sol e um planeta, ou da Terra em relação a um satélite.

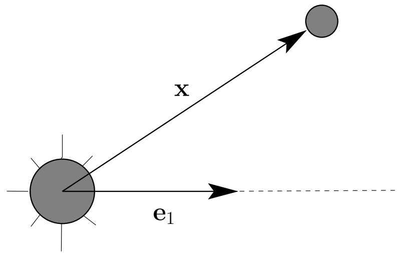

Figura 3.7: O vetor $\mathbf{x}$ indica a posição do corpo de menor massa em relação ao corpo de maior massa e a direção $\mathbf{e}_1$ é escolhida arbitrariamente no plano da órbita e mantida fixa.

A situação física que dá origem a Equação (3.6) ocorre no espaço euclidiano de dimensão três, entretanto a equação faz sentido em qualquer dimensão. Para ilustrar a utilidade dos conceitos da Álgebra Geométrica, a análise a seguir não levará em conta a dimensão do espaço em que a equação está definida. O primeiro passo é demonstrar que as órbitas são planares. Para isso seja $t \mapsto x(t)$ uma solução da Equação (3.6) com $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(t_0)$ e $\mathbf{v}_0 := \mathbf{x}'(t_0)$. Defina $\mathbf{L} := \mathbf{x} \wedge \mathbf{x}'$ (momento angular) então

$$\mathbf{L}' = \mathbf{x}' \wedge \mathbf{x}' + \mathbf{x} \wedge \mathbf{x}'' = 0,$$

em que a primeira parcela se anula pois os fatores são iguais e a segunda se anula pois a Equação (3.6) indica que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}''$ são colineares. Logo, $\mathbf{L} = \mathbf{x}_0 \wedge \mathbf{v}_0$ é constante e portando $\mathbf{x}(t)$ permanece no plano $\boldsymbol{\alpha}$ gerado por $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{v}_0$ para todo t. Sejam $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ vetores ortonormais do plano $\boldsymbol{\alpha}$. Podemos, portanto, escrever o vetor posição em coordenadas polares nesse plano como $\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{e}_1\bar{\mathbf{U}} = U^2\mathbf{e}_1$, isto é, $r = \bar{\mathbf{U}}\mathbf{U} = |\mathbf{U}|^2$. O objetivo é obter uma equação diferencial para $\mathbf{U}$. Por meio de derivação, obtemos

$$\mathbf{x}' = 2\mathbf{U}\mathbf{U}'\mathbf{e}_1$$

ou ainda

$$\mathbf{x}'\mathbf{e}_1\bar{U} = 2\mathbf{U}\mathbf{U}'\bar{\mathbf{U}} = 2r\mathbf{U}'$$

Prosseguimos introduzindo a mudança de variáveis $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = r$ que ajudará a lidar com fato de que a Equação (3.6) não está definida na origem. Com isso, reescrevemos

$$\mathbf{x}'\mathbf{e}_1\bar{\mathbf{U}} = 2r\mathbf{U}' = 2\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{d}s}$$

Derivando com relação a s, substituindo o valor de r e rearranjando os fatores em cada parcela:

$$\begin{aligned}2\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{U}}{\mathrm{d}s^2} &= \mathbf{x}''\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\mathbf{e}_1\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{x}'\mathbf{e}_1\bar{\mathbf{U}}'\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \mathbf{x}''r\mathbf{e}_1\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{x}'\mathbf{e}_1\bar{\mathbf{U}}'r\\ &= \mathbf{x}''\bar{\mathbf{U}}\mathbf{U}\mathbf{e}_1\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{x}'\mathbf{e}_1\bar{\mathbf{U}}'\bar{\mathbf{U}}\mathbf{U}\\ &= \mathbf{x}''\mathbf{U}\mathbf{e}_1\bar{\mathbf{U}}\mathbf{U} + \mathbf{x}'\mathbf{U}\mathbf{U}'\mathbf{e}_1\mathbf{U}\end{aligned}$$

daí, usando-se que $\mathbf{U}\mathbf{e}_1\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{x}$ e $\mathbf{U}\mathbf{U}'\mathbf{e}_1 = \mathbf{x}'/2$, obtêm-se

$$2\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{U}}{\mathrm{d}s^2} = (\mathbf{x}''\mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}'^2}{2})\mathbf{U}$$

usando a Equação (3.6) para obter $\mathbf{x}''$ e substituindo na equação acima, encontramos a equação diferencial para $\mathbf{U}$:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{U}}{\mathrm{d}s^2} = \frac{1}{2m}(\frac{m}{2}\mathbf{x}'^2 - \frac{\mu}{r})\mathbf{U} = \frac{E}{2m}\mathbf{U}$$

em que $E := \frac{m}{2}\mathbf{x}'^2 - \frac{\mu}{r}$ é constante, como pode se ver por derivação

$$E' = (m\mathbf{x}'' + \mu\frac{\mathbf{x}}{r^3})\cdot\mathbf{x}' = 0.$$

Portanto $\mathbf{U}$, na variável s, satisfaz um equação diferencial linear, de segunda ordem com coeficientes constantes e, consequentemente, pode ser resolvida analiticamente. Portanto, temos a seguinte

Proposição 3.1. *Seja $\mathbf{x} : R \to E$ uma solução da equação*

$$m\mathbf{x}'' = -\mu\frac{\mathbf{x}}{r^3} \quad \textit{em que } r = |\mathbf{x}|.$$

Então

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{U}^2(s)\mathbf{e}_1\\ t &= \int_0^s |\mathbf{U}(\alpha)|^2\mathrm{d}\alpha.\end{aligned}$$

e

Se $E = 0$: $\mathbf{U}(s) = s\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (a órbita é uma parábola ou uma semi-reta);

Se $E < 0$: $\mathbf{U}(s) = \mathbf{A}\mathrm{e}^{s\mathbf{i}\sqrt{-\frac{E}{2m}}} + \mathbf{B}\mathrm{e}^{-s\mathbf{i}\sqrt{-\frac{E}{2m}}}$ (a órbita é uma elipse);

Se $E > 0$: $\mathbf{U}(s) = \mathbf{A}\mathrm{e}^{s\sqrt{\frac{E}{2m}}} + \mathbf{B}\mathrm{e}^{-s\sqrt{\frac{E}{2m}}}$ (a órbita é uma hiperbóle).

Exercícios

3.1. Para os vetores $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2, \mathbf{v} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \mathbf{w} = 5\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ calcule:

a) $\mathbf{uv}$;

b) $\mathbf{uvw}$;

c) $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})(\mathbf{w} \wedge \mathbf{v})$;

d) $(1 + \mathbf{u})\mathbf{vw}$.

3.2. Mostre que:

a) $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})(\mathbf{z} \wedge \mathbf{w}) = [(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})\mathbf{z}] \cdot \mathbf{w}$;

b) $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})(\mathbf{z} \wedge \mathbf{w}) + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{z})(\mathbf{w} \wedge \mathbf{y}) + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{w})(\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) = 0$.

3.3. Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ três vetores unitários e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \alpha$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \beta$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \gamma$ Mostre que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 + 2\alpha\beta\gamma .$$

3.4. Sejam $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ não-colineares de um plano $\boldsymbol{\pi}$ tais que $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = 0$ Mostre que para cada $\mathbf{v}$ de $\boldsymbol{\pi}$, existem únicos α, β, γ tais que $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 + \gamma\mathbf{u}_3$ e $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

3.5. Mostre as propriedades **C1** a **C5**.

3.6. Determine o ponto de interseção das retas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ determinadas pelos pontos $A(-1, 4)$, $B(2, 1)$ e pelas direções $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$, respectivamente.

3.7. Seja $\mathbf{r}$ a reta de equação $2x - 3y = 1$ e $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$ as retas que passam por $A(1, -2)$ e são paralela e perpendicular à $\mathbf{r}$, respectivamente.

(a) Encontre a equação de $\mathbf{s}$;

(b) Encontre a equação de $\mathbf{t}$ e determine as coordenadas do ponto de intersecção de $\mathbf{r}$ e $\mathbf{t}$.

3.8. Sejam $\mathbf{r}$ a reta determinada pelo ponto A com vetor-direção $\mathbf{d}$ e $\overline{BC}$ um segmento. Suponha que $\mathbf{r}$ e $\overline{BC}$ são coplanares. Mostre que:

(a) $\mathbf{r}$ intersecta $\overline{BC}$ se e somente se $(\mathbf{d} \wedge \overrightarrow{AB})(\mathbf{d} \wedge \overrightarrow{AC}) \geq 0$;

(b) $\mathbf{r}$ intersecta $\overline{BC}$ em um ponto interior ao segmento se e somente se $(\mathbf{d} \wedge \overrightarrow{AB})(\mathbf{d} \wedge \overrightarrow{AC}) > 0$.

3.9. Considere um círculo centrado em A de raio r e seja P um ponto fora dele: Determine os vetores-direção e os pontos de interseção do círculos com suas retas tangentes que passam por P.

3.10. *Identidade fundamental da trigonometria.* Use a definição dada para as funções seno e cosseno para demonstrar que para todo ângulo θ vale $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

3.11. Determine os valores do cosseno e do seno para os ângulos $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, π e $\frac{3}{2}\pi$ usando o produto geométrico de vetores unitários.

3.12. Mostre as seguintes identidades trigonométricas usando produto geométrico:

a) $\sin x = -\sin(x-\pi)$ e $\cos x = -\cos(x-\pi)$;

b) $\sin x = -\sin(2\pi - x)$ e $\cos x = cos(2\pi - x)$;

c) $\sin x = \sin(\pi - x)$ e $\cos x = -\cos(\pi - x)$.

3.13. *Lei dos cossenos.* Mostre que para um triângulo ABC qualquer vale

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB||AC|\cos\theta$$

em que θ é o ângulo referente ao vértice A.

3.14. Sejam $\mathbf{d}$ e $\mathbf{i}$ vetor e bivetor unitários. Determine todos os pontos X de E tais que o vetor $\overrightarrow{AX}$ é solução da equação $(\mathbf{id}) \cdot \overrightarrow{AX} = 1$.

3.15. Sejam $\mathbf{d}$ e $\mathbf{i}$ vetor e bivetor unitários. Determine todas as soluções da equação $\mathbf{d} \wedge \mathbf{u} = 2\mathbf{i}$, tais que $\|\mathbf{u}\| = 1$.

3.16. Mostre que a distância de um ponto P a uma reta $\mathbf{r}$, determinada por $\mathbf{d}$ e A, pode ser calculada por

$$\operatorname{dist}(P, \mathbf{r}) = \frac{|(\mathbf{id}) \cdot \overrightarrow{AP}|}{\|\mathbf{d}\|} .$$

3.17. Seja $\mathbf{R} = \alpha + \mathbf{u}$, em que α é um número real e $\mathbf{u}$ é um vetor.

a) Determine condições sobre α e $\mathbf{u}$ para que $\mathbf{R}$ seja inversível;

b) Mostre que se $\mathbf{R}^{-1}$ não existe, então $\mathbf{R}$ pode ser normalizado de forma que $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}$. Tais multivetores são chamados de idempotentes;

c) Mostre que se $\mathbf{R} \neq 1$ é idempotente então o produto dele com qualquer multivetor não é invertível.

d) Encontre um $\mathbf{R}$ idempotente que possui um inverso.

3.18. Mostre, usando o produto geométrico, a identidade

$$\tan(\theta + \theta') = \frac{\tan\theta + \tan\theta'}{1 - \tan\theta' \tan\theta}\,.$$

3.19. Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vetores unitários e θ o ângulo entre eles. Mostre que

$$\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}\mathbf{i}} = \frac{1 + \mathbf{u}\mathbf{v}}{\sqrt{2(1 + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}}\,.$$

Capítulo 4

A Álgebra Geométrica do Espaço Euclidiano

Vimos no capítulo anterior que a definição do produto geométrico de vetores é suficiente para determinar o produto dos elementos da forma $\alpha + \mathbf{u} + \mathbf{B}$ cujas componentes vetorial e bivetorial possuem representantes em um mesmo plano $\boldsymbol{\pi}$. Obtivemos assim uma álgebra que foi denominada álgebra geométrica do plano. Estenderemos essa álgebra para todo o espaço euclidiano. A notação será rigorosamente a mesma, porém a existência de objetos tais como bivetores com direções distintas e trivetores faz dessa uma álgebra mais rica e mais eficiente na resolução de problemas geométricos em três dimensões. O conjunto $\mathcal{A}_3$ conterá números reais, vetores, bivetores e trivetores em uma estrutura vetorial análoga a de $\mathcal{A}_2$. Isto é, cada elemento $\mathbf{S} \in \mathcal{A}_3$ será da forma $\mathbf{S} = \alpha + \mathbf{u} + \mathbf{B} + \mathbf{T}$ em que α é um número real, $\mathbf{u}$ um vetor, $\mathbf{A}$ um bivetor e $\mathbf{T}$ um trivetor. Os elementos de $\mathcal{A}_3$ são denominados multivetores. O produto geométrico já está definido para todo par de vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ pela fórmula

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}. \tag{4.1}$$

Essa fórmula não determina todos os produtos de multivetores, mas impõe fortes restrições sobre esses produtos. Vamos analisar essa situação a seguir e estender o produto geométrico de vetores a todos os multivetores.

4.1 Produto Geométrico de Multivetores

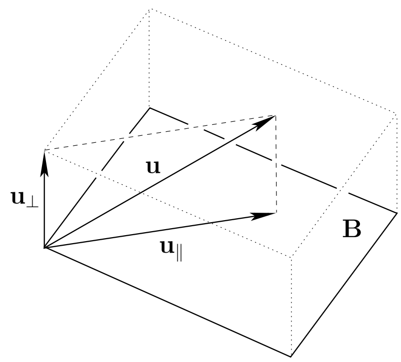

Figura 4.1: Decomposição do vetor $\mathbf{u}$ em componentes paralela e normal ao plano do bivetor $\mathbf{B}$.

Antes de definirmos o produto geométrico de vetores por bivetores, revejamos a definição dos produtos interno e exterior a partir do produto geométrico de vetores. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \neq 0$ são vetores, podemos decompor $\mathbf{u}$ como soma de componentes paralela e ortogonal a $\mathbf{v}$, isto é, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\| + \mathbf{u}_\perp$. Em consequência,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u}_\| \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= \mathbf{u}_\perp \mathbf{v} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{uv} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u}_\| \mathbf{v} + \mathbf{u}_\perp \mathbf{v}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Sejam $\mathbf{u}$ um vetor e $\mathbf{B} \neq 0$ um bivetor. Suponha que sabemos definir o produto geométrico $\mathbf{uB}$. Então escrevendo $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\| + \mathbf{u}_\perp$, em que agora as componentes são paralela e normal ao bivetor $\mathbf{B}$, Figura 4.1, temos

$$\mathbf{uB} = \mathbf{u}_\| \mathbf{B} + \mathbf{u}_\perp \mathbf{B}\,. \tag{4.4}$$

A primeira parcela na equação acima já está definida, uma vez que $\mathbf{u}_\|$ e $\mathbf{B}$ são coplanares. Além disso, como vimos na Seção 3.1, $\mathbf{u}_\| \mathbf{B}$ é um vetor do plano determinado por $\mathbf{B}$. Por analogia com a Equação (4.2), definimos o produto interno de vetor por bivetor por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{B} := \mathbf{u}_\| \mathbf{B}\,. \tag{4.5}$$

Com essa definição, a Equação (4.4) se reescreve como

$$\mathbf{uB} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{u}_\perp \mathbf{B}\,,$$

que imediatamente, agora por analogia com a Equação (4.3), sugere definir

$$\mathbf{u}_\perp \mathbf{B} := \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}$$

ou, equivalentemente,

$$\mathbf{uB} := \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}\,. \tag{4.6}$$

Então, por definição, o produto de vetor por bivetor tem uma componente vetorial e outra trivetorial.

Para corroborar ainda mais a conveniência da definição de $\mathbf{uB}$ por meio da Equação (4.6), mostraremos que $\mathbf{u}_\perp\mathbf{B}$ não poderia ser número real ou vetor ou ainda bivetor. Se $\mathbf{v}$ é um vetor qualquer, podemos escrever $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\| + \alpha\mathbf{u}_\perp$. Daí temos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\mathbf{u}_\perp\mathbf{B}) &= (\mathbf{v}_\| + \alpha\mathbf{u}_\perp)\mathbf{u}_\perp\mathbf{B}\\ &= \mathbf{v}_\|\mathbf{u}_\perp\mathbf{B} + \alpha\mathbf{u}_\perp\mathbf{u}_\perp\mathbf{B}\\ &= -\mathbf{u}_\perp\mathbf{v}_\|\mathbf{B} + \alpha\mathbf{u}_\perp^2\mathbf{B}\\ &= \mathbf{u}_\perp\mathbf{B}\mathbf{v}_\| + \alpha\mathbf{u}_\perp^2\mathbf{B}\,.\end{aligned}$$

Mas, $\mathbf{B}\mathbf{v}_\|$ é um vetor do plano de $\mathbf{B}$, e, portanto, ortogonal a $\mathbf{u}_\perp$. Logo, $\mathbf{u}_\perp\mathbf{B}\mathbf{v}_\| = \mathbf{u}\wedge(\mathbf{B}\mathbf{v}_\|)$ é um bivetor. Como a adição de bivetores é um bivetor, o membro direito da igualdade acima é um bivetor. Isso mostra que $\mathbf{v}(\mathbf{u}_\perp\mathbf{B})$ sempre é um bivetor, independentemente do vetor $\mathbf{v}$. Portanto, o elemento $\mathbf{u}_\perp\mathbf{B}$ não pode ser um bivetor, já que para vetores pertencentes ao plano gerado por ele deveria ser outro vetor e como podemos ver o resultado acima é sempre um bivetor. Claramente não pode ser um número real. Para vermos que não pode ser um vetor basta notar que a componente real do resultado é nula, logo se $\mathbf{u}_\perp\mathbf{B}$ fosse um vetor ele seria ortogonal a todos os vetores do espaço, ou seja, seria o vetor nulo.

A definição de produto de vetor por bivetor conclui a definição da álgebra geométrica do espaço. De fato, como se ver facilmente, todos os produtos dos geradores de $\mathcal{A}_3$, $\{1;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3;\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k};\mathbf{I}\}$, em que

$$\begin{aligned}\mathbf{i} &:= \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_2\\ \mathbf{j} &:= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3\\ \mathbf{k} &:= \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1\\ \mathbf{I} &:= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3,\end{aligned}$$

estão definidos e, portanto, todos os produtos de elementos de $\mathcal{A}_3$ estão definidos.

Produto interno de multivetores. Por definição, os multivetores podem ser escritos na forma

$$\mathbf{R} = \langle\mathbf{R}\rangle_0 + \langle\mathbf{R}\rangle_1 + \langle\mathbf{R}\rangle_2 + \langle\mathbf{R}\rangle_3$$

em que $\langle\mathbf{R}\rangle_0$, $\langle\mathbf{R}\rangle_1$, $\langle\mathbf{R}\rangle_2$, $\langle\mathbf{R}\rangle_3$ são as componentes real, vetorial, bivetorial e trivetorial de $\mathbf{R}$, respectivamente. Ficam, portanto, definidas aplicações

$\langle\rangle_m : \mathcal{A}_3 \mapsto \mathcal{A}_3$, $m = 1, 2, 3$, que gozam das seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R} + \mathbf{S} \rangle_m &= \langle \mathbf{R} \rangle_m + \langle \mathbf{S} \rangle_m \\ \langle \alpha \mathbf{R} \rangle_m &= \alpha \langle \mathbf{R} \rangle_m \end{aligned} \tag{4.7}$$

para todos números reais α e multivetores $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$. Quando não há risco de confusão, escrevemos simplesmente $\mathbf{R}_m$ em vez de $\langle \mathbf{R} \rangle_m$. Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ são vetores e $\mathbf{B}$ é um bivetor, então por definição temos

$$\begin{aligned} \mathbf{uv} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \langle \mathbf{uv} \rangle_0 + \langle \mathbf{uv} \rangle_2 \\ \mathbf{uB} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} = \langle \mathbf{uB} \rangle_1 + \langle \mathbf{uB} \rangle_3 \,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{uv} \rangle_0 \quad \text{e} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} = \langle \mathbf{uB} \rangle_1 \,.$$

Por paralelismo, definimos o produto interno de $\mathbf{R}_m$ e $\mathbf{S}_n$ por

$$\mathbf{R}_m \cdot \mathbf{S}_n := \begin{cases} \langle \mathbf{R}_m \mathbf{S}_n \rangle_{|m-n|} & \text{se } m, n \neq 0. \\ 0 \quad \text{se } m = 0 \text{ ou } n = 0. \end{cases}$$

Exemplo 4.1. O produto interno entre multivetores não é simétrico como no caso do produto interno entre vetores. De fato, considere o bivetor $\mathbf{i}$ e um vetor $\mathbf{u}$ com representante no plano de $\mathbf{i}$. Então $\mathbf{u} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{ui} = -\mathbf{iu} = -\mathbf{i} \cdot \mathbf{u}$.

Fixado um dos fatores, o produtos interno herda as propriedades listadas na Equação (4.7) – linearidade – e pode ser estendido a todos os multivetores por meio delas, Exercício 4.15.

Paralelismo e ortogonalidade. As noções de paralelismo e ortogonalidade entre vetores se estendem naturalmente para noções similares entre vetores e bivetores e entre bivetores e bivetores. Assim, dizemos que o vetor $\mathbf{u}$ é paralelo ao bivetor $\mathbf{B}$ se ambos possuem representantes em um mesmo plano, etc.

Paralelismo e ortogonalidade entre vetores e bivetores. A exemplo dos vetores, os produtos interno e exterior, permitem caracterizar algebricamente os conceitos de paralelismo e ortogonalidade em geral. Desse modo, se $\mathbf{u}$ é um vetor e $\mathbf{B}$ é um bivetor, as Equações (4.5) e (4.6) implicam que

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{B} \iff \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} = 0 \iff \mathbf{uB} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}$$

e

$$\mathbf{u} \parallel \mathbf{B} \iff \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} = 0 \iff \mathbf{uB} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} \,.$$

Exemplo 4.2. Sejam $P(1,2,1)$ e $\mathbf{B} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Resolveremos a equação $\overrightarrow{PX} \cdot \mathbf{B} = 0$ em termos de coordenadas. Tem-se,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PX}\,\mathbf{B} &= [(x-1)\mathbf{e}_1 + (y-2)\mathbf{e}_2 + (z-1)\mathbf{e}_3](\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) \\ &= (2-y)\mathbf{e}_1 + (x-z)\mathbf{e}_2 + (y-2)\mathbf{e}_3 + (x+z-2)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\,.\end{aligned}$$

Logo

$$\overrightarrow{PX} \cdot \mathbf{B} = (2-y)\mathbf{e}_1 + (x-z)\mathbf{e}_2 + (y-2)\mathbf{e}_3\,.$$

Portanto, as coordenadas da solução $X(x,y,z)$ ficam caracterizadas por $x = z$ e $y = 2$. Mais adiante apresentaremos uma solução para essa equação sem referências à coordenadas.

Paralelismo e ortogonalidade entre bivetores. Se $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são bivetores, podemos encontrar vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, com $\mathbf{v}$ ortogonal aos outros dois, tais que $\mathbf{B} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{uv}$ e $\mathbf{C} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{vw}$. Então,

$$\mathbf{BC} = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{u}\mathbf{v}^2\mathbf{w} = \mathbf{v}^2\mathbf{uw} = \mathbf{v}^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w})\,. \tag{4.8}$$

Logo,

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{v}^2\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}\,.$$

Indicaremos a segunda parcela da Equação (4.8) pelo *colchete* $[\mathbf{B},\mathbf{C}]$. Com essa notação, escrevemos

$$\mathbf{BC} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + [\mathbf{B},\mathbf{C}]\,.$$

Estamos agora em condições de analisar algebricamente as posições relativas dos bivetores $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$. Por um lado, os bivetores $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são coplanares se e somente os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ são paralelos, portanto,

$$\mathbf{B} \parallel \mathbf{C} \iff \mathbf{BC} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \iff [\mathbf{B},\mathbf{C}] = 0\,.$$

Por outro lado, os bivetores $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são ortogonais se e somente os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{w}$ são ortogonais, portanto,

$$\mathbf{B} \perp \mathbf{C} \iff \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = 0 \iff \mathbf{BC} = [\mathbf{B},\mathbf{C}]\,.$$

O elemento $[\mathbf{B},\mathbf{C}]$ é um bivetor ortogonal aos bivetores $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$. Realmente, a componente não-numérica no segundo membro da Equação (4.8) é um bivetor, logo $[\mathbf{B},\mathbf{C}]$ é um bivetor. Além disso,

$$\mathbf{B}[\mathbf{B},\mathbf{C}] = \mathbf{B}^2\mathbf{C} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B}$$

é uma adição de bivetores e, portanto, também é um bivetor. Logo $\mathbf{B} \cdot [\mathbf{B},\mathbf{C}] = 0$. Analogamente se mostra que $\mathbf{C} \cdot [\mathbf{B},\mathbf{C}] = 0$.

O fato de $[\mathbf{B},\mathbf{C}]$ associar um par de bivetores a outro bivetor é notável e será melhor analisado nos Exercícios 4.16 e 4.17.

Bivetores e bases ortonormais. Vejamos o que ocorre no caso de produto de bivetores obtidos a partir vetores ortonormais. Se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é uma base ortonormal, então, como vimos na Seção 2.4, o espaço dos bivetores é gerado por $\mathbf{i} = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2$, $\mathbf{j} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{k} = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$. Multiplicando esses elementos dois a dois obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{ij} &= \mathbf{k} = -\mathbf{ji} \\ \mathbf{jk} &= \mathbf{i} = -\mathbf{kj} \\ \mathbf{ki} &= \mathbf{j} = -\mathbf{ik} \\ \mathbf{i}^2 &= \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1\,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

e daí

$$\begin{aligned} &\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0 \\ &\|\mathbf{i}\|^2 = \|\mathbf{j}\|^2 = \|\mathbf{k}\|^2 = 1\,. \end{aligned}$$

Conclui-se daí que o conjunto $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ é ortonormal e, portanto, uma base para o espaço dos bivetores, Exercício 4.9. Em particular, a dimensão desse espaço é igual a dimensão do espaço dos vetores.

A exemplo dos vetores, a ortonormalidade dos bivetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ permite que se expresse o produto interno de bivetores de forma aritmética. De fato, sejam $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}$ e sejam $\mathbf{C} = \alpha'\mathbf{i} + \beta'\mathbf{j} + \gamma'\mathbf{k}$, então

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} = -(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')\,.$$

Em particular, a norma de um bivetor pode ser obtida por meio do teorema de Pitágoras:

$$\|\mathbf{B}\|^2 = -\mathbf{B}^2 = -\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\,. \tag{4.10}$$

As demonstrações dessas fórmulas são inteiramente similares às suas correspondentes para vetores e, por isso, serão omitidas.

Vamos interpretar o resultado acima geometricamente: se $\mathbf{B} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, escrevamos $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$. Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 & \mathbf{v}_1 &= v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{u}_2 &= u_1\mathbf{e}_1 + u_3\mathbf{e}_3 & \mathbf{v}_2 &= v_1\mathbf{e}_1 + v_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{u}_3 &= u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 & \mathbf{v}_3 &= v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

são as projeções de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ nos planos dos bivetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, respectivamente.

Um cálculo direto nos dá ainda que

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k} \\
\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{v}_1 &= \alpha\mathbf{i} \\
\mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{v}_2 &= \beta\mathbf{j} \\
\mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{v}_3 &= \gamma\mathbf{k}\,.
\end{aligned}$$

Logo, os coeficientes α, β e γ são, a menos do sinal, as áreas das projeções ortogonais do paralelogramo de lados $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ nos planos, dois a dois ortogonais entre si, determinados por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. Portanto, a Equação (4.10) enuncia que *o quadrado da área de um paralelogramo é igual a soma dos quadrados das áreas de suas projeções ortogonais nos planos coordenados.* Esse fato é conhecido como Teorema de de Gua . Os valores exatos dos coeficientes α, β e γ aparecem na Equação (2.5), mas são irrelevantes aqui.

Exemplo 4.3. Calcularemos o colchete de dois bivetores escritos em uma base ortonormal. Considere os bivetores $\mathbf{B} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{C} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Para encontrar o resultado do colchete basta calcular o produto geométrico entre eles e tomar a parte bivetorial. De fato,

$$\begin{aligned}
\mathbf{BC} &= (5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k})(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \\
&= -10 - 3 - 2 + 5\mathbf{ij} - 5\mathbf{ik} + 6\mathbf{ji} - \mathbf{jk} - 4\mathbf{ki} - \mathbf{kj} \\
&= -15 + \mathbf{j} - \mathbf{k}\,.
\end{aligned}$$

Portanto, $[\mathbf{B}, \mathbf{C}] = \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Produtos geométricos com trivetores. A tridimensionalidade do espaço euclidiano E faz com que o espaço dos trivetores seja unidimensional. Seja $\mathbf{I}$ um gerador unitário desse espaço. Relembramos que o módulo de um trivetor é o volume determinado por qualquer um de seus representantes. Analisaremos a ação do elemento $\mathbf{I}$ nos espaços dos vetores e dos trivetores. Seja $\mathbf{u}$ um vetor, então existem vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ ortogonais entre si e a $\mathbf{u}$, tais que $\mathbf{I} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{uvw}$. Primeiro faremos o produto de $\mathbf{I}$ por si mesmo:

$$\mathbf{I}^2 = (\mathbf{uvw})^2 = -\mathbf{u}^2\mathbf{v}^2\mathbf{w}^2 = -(\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|)^2 = -\|\mathbf{I}\|^2 = -1\,.$$

Agora, efetuando o produto de $\mathbf{u}$ por $\mathbf{I}$, tem-se

$$\mathbf{uI} = \mathbf{u}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{u}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{u}(\mathbf{vwu}) = (\mathbf{uvw})\mathbf{u} = \mathbf{Iu}\,.$$

Logo, $\mathbf{I}$ comuta com todos os vetores e, em consequência, também comuta com todos os multivetores. Refazendo a conta temos

$$\mathbf{uI} = \mathbf{u}(\mathbf{uvw}) = \mathbf{u}^2(\mathbf{vw}) = \mathbf{u}^2(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}\,.$$

A terceira igualdade mostra que $\mathbf{uI}$ é um bivetor ortogonal ao vetor $\mathbf{u}$. Analogamente, se $\mathbf{B} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ é um bivetor, podemos conseguir um vetor $\mathbf{w}$ ortogonal ao plano de $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{I} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{Bw}$. Portanto,

$$\mathbf{BI} = \mathbf{B}^2\mathbf{w} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{I}\,.$$

Logo, $\mathbf{BI}$ é um vetor ortogonal ao bivetor $\mathbf{B}$. Conclui-se daí que a multiplicação por $\mathbf{I}$ faz corresponder a cada vetor um bivetor que lhe é ortogonal e vice-versa. Como $\mathbf{I}^2 = -1$, essa correspondência é biunívoca e sua inversa é a multiplicação por $-\mathbf{I}$. Vejamos um pouco mais:

$$-(\mathbf{uI}) \cdot (\mathbf{vI}) = -\langle \mathbf{uIvI} \rangle_0 = \langle \mathbf{uv} \rangle_0 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\,.$$

Isto é, a multiplicação preserva o produto interno a mesmo de um sinal e, portanto, preserva normas.

Exemplo 4.4. Sejam A e $\mathbf{B}$ como no Exemplo 4.2, resolveremos a equação $\overrightarrow{AX} \cdot \mathbf{B} = 0$ sem o auxílio de coordenadas. De fato o vetor $\mathbf{BI}$ é ortogonal a $\mathbf{B}$ e, consequentemente, paralelo a $\overrightarrow{AX}$. Portanto, as soluções procuradas são $\overrightarrow{AX} = t\mathbf{BI}$, em que o parâmetro t é um número real.

Para se recuperar a solução em coordenadas, basta efetuar as contas:

$$\mathbf{BI} = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\,,$$

Logo, em coordenadas, $X(x, y, z)$ é dado por

$$\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 \\ z &= 1 - t\,. \end{aligned}$$

Note que o conjunto solução é uma reta passando por A e perpendicular ao plano de $\mathbf{B}$. Compare com a solução obtida anteriormente.

Trivetores e bases ortonormais. Seja $\boldsymbol{\beta} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ uma base ortonormal de V e $\mathbf{I} := \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ um trivetor unitário. Se $\tilde{\boldsymbol{\beta}} := \{\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3\}$ é outra base ortonormal, então $\mathbf{I} = \pm\,\tilde{\mathbf{e}}_1\tilde{\mathbf{e}}_2\tilde{\mathbf{e}}_3$, em que o sinal depende de as bases terem ou não a mesma orientação. Portanto, o trivetor $\mathbf{I}$ se transforma de forma similar aos números reais e, por isso, é chamado de pseudo-escalar. Calculando o produto geométrico dos elementos da base $\boldsymbol{\beta}$ por $\mathbf{I}$ temos

$$\mathbf{e}_1\mathbf{I} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_2\mathbf{I} = -\mathbf{j} \quad \mathbf{e}_3\mathbf{I} = -\mathbf{k}$$

e, reciprocamente,

$$\mathbf{iI} = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{jI} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{iI} = \mathbf{e}_3\,.$$

Portanto, o resultado do produto do trivetor $\mathbf{I}$ por um elemento da base produz um bivetor unitário que gera o plano ortogonal ao vetor que está sendo multiplicado.

Exemplo 4.5. *Processo de ortonormalização de Gram-Schmidt.* Seja $\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{v}_1\,, \mathbf{v}_2\, \mathbf{v}_3\}$ uma base de V. Obteremos um base ortonormal a partir de $\boldsymbol{\beta}$ usando os recursos disponibilizados pelo produto geométrico. Façamos $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1/\|\mathbf{v}_1\|$. Seja $\mathbf{i} = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2/\|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2\|$, então, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{i}$ e $\mathbf{e}_3 = \mathbf{i}\mathbf{I}$, em que o trivetor $\mathbf{I}$ é escolhido com a mesma orientação de $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_3$.

4.2 Complexos, Quatérnions e Perplexos

A álgebra geométrica inclui como subálgebras cópias dos número complexos, quaterniônicos e perplexos. Assim, ela unifica e expande três sistemas algébricos importantes tando do ponto de vista da teoria quanto das aplicações. Além disso, provê interpretações geométricas para esses sistemas originalmente apresentados apenas por suas propriedades algébricas.

Números complexos. Sejam $\mathbf{I}$ um trivetor unitário e $\mathbb{R}[\mathbf{I}] = \{\alpha+\beta\mathbf{I} \mid \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}\}$. Como $\mathbf{I}^2 = -1$, o conjunto $\mathbb{R}[\mathbf{I}]$ é uma cópia dos números complexos. Essa cópia contrasta com as cópias $\mathbb{R}[\mathbf{i}]$, uma vez que sua unidade imaginária, o trivetor $\mathbf{I}$, comuta com todos os multivetores, enquanto o bivetor $\mathbf{i}$ apenas anticomuta com os vetores de seu próprio plano.

Quatérnions. Sejam $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3$ vetores ortonormais. Já vimos que $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, Equação (4.9). Logo,

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1\,.$$

Essas são relações que caracterizam a *álgebra dos quatérnions* de Hamilton.

Perplexos. Seja $\mathbf{u}$ um vetor unitário qualquer, com $\mathbf{u}^2 = 1$, e $\mathbb{R}[\mathbf{u}] = \{\alpha + \beta\mathbf{u} \,|\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}\}$. Sejam $\mathbf{Z} = \alpha + \beta\mathbf{u}$ e $\mathbf{W} = \delta + \gamma\mathbf{u}$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} + \mathbf{W} &= (\alpha + \delta) + (\beta + \gamma)\mathbf{u} \\ \mathbf{ZW} &= (\alpha\delta + \beta\gamma) + (\alpha\gamma + \beta\delta)\mathbf{u}\,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Portanto, $\mathbb{R}[\mathbf{u}]$ é uma subálgebra comutativa da álgebra geométrica. As operações em (4.11) caracterizam uma estrutura álgebrica abstrata conhecida como *álgebra dos números perplexos.*

4.3 Retas e Planos

Nesta seção trataremos de algumas relações entre pontos, retas e planos, como por exemplo, distâncias e ângulos.

Equações paramétrica e cartesiana da reta (Pertinência de um ponto a uma reta.) No processo de dedução da equação de uma reta determinada por dois pontos distintos no plano, não se usou, em verdade, que os pontos eram planares. Por essa razão, a mesma equação paramétrica é válida no espaço:

$$\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{AB} \tag{4.12}$$

em que A e B são os pontos dados. Podemos eliminar o parâmetro t nessa equação e obter uma equação cartesiana

$$\mathbf{d} \wedge \overrightarrow{AX} = 0 \tag{4.13}$$

em que $\mathbf{d} = \overrightarrow{AB}$. Vimos ainda no estudo do plano como escrever diretamente uma equação de uma reta conhecidos um de seus pontos e a direção de uma reta perpendicular a ela. No espaço, a situação é um pouco diferente, uma vez que a direção de uma reta não determina a direção de outra perpendicular a ela, esse papel é desempenhado por planos. Podemos portanto escrever diretamente uma equação cartesiana de uma reta conhecidos um de seus pontos, digamos A e um plano $\boldsymbol{\alpha}$ perpendicular a ela. Para isso precisamos de um bivetor não-nulo $\mathbf{D}$ com representante em $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\mathbf{D} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$$

Assim como no plano, uma direção $\mathbf{d}$ de uma reta e uma direção normal a ela $\mathbf{D}$ estão relacionadas por $\mathbf{D} \propto \mathbf{dI}$ e $\mathbf{d} \propto \mathbf{DI}$.

Distância de um ponto a uma reta. Assim como no caso da Equações (4.12) e (4.13), a fórmula

$$\operatorname{dist}(P, \mathbf{r}) = \frac{\|\mathbf{d} \wedge \overrightarrow{AP}\|}{\|\mathbf{d}\|}.$$

é geral para o cálculo da distância de um ponto P à reta $\mathbf{r}$ determinada pelo ponto A com vetor direção $\mathbf{d}$.

Ângulo entre retas. Em um plano, duas retas não-paralelas determinam quatros ângulos. No espaço essa situação em geral não se verifica a menos que as retas se interceptem. Precisamos, portanto, definir o que entendemos por ângulo entre duas retas reversas. Sejam $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ duas retas reversas, por qualquer ponto de $\mathbf{s}$, trace-se um reta $\mathbf{r}'$ paralela a $\mathbf{r}$. O ângulo entre $\mathbf{r}'$ e $\mathbf{s}$ é o mesmo para qualquer reta $\mathbf{r}'$ assim construída. Define-se o ângulo entre as retas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ com sendo o ângulo entre uma tal $\mathbf{r}'$ e $\mathbf{s}$. As fórmulas para determinação do ângulo entre retas planares se aplicam. Se as retas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ têm vetores direção $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, respectivamente, e θ é o menor ângulo entre elas então.

$$\cos(\theta) = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|}$$

alternativamente, se as retas não são ortogonais,

$$\tan(\theta) = \frac{\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|}{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|} .$$

Evidentemente, as fórmulas são válidas independentemente de as retas serem reversas ou não.

Posições relativas entre duas retas. A discussão sobre como determinar as possíveis posições de duas retas no espaço, a partir dos pares ponto e direção que as determinam, é semelhante ao caso do plano, entretanto há um número maior de casos, em razão do aparecimento de retas reversas e de retas ortogonais. Entende-se por retas ortogonais duas retas reversas em que o vetores direções são ortogonais. Deixamos a listagem de todos os possíveis casos como exercício para o leitor.

Equações do plano. Um plano fica determinado por três pontos não-colineares, digamos A, B e C. Um ponto X pertence a esse plano se e somente se os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AX}$ são linearmente dependentes, isto é, existem número reais m e n tais que

$$\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} \tag{4.14}$$

que é a equação paramétrica do plano. A exemplo da reta, a equação paramétrica é boa para descrever o plano, mas não é a forma mais eficiente para se verificar se um determinado ponto, digamos P, pertence ou não a esse plano, uma vez que para isso é necessário tentar resolver $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$

para m e n. Para eliminar as variáveis m e n na equação, é suficiente formar o *bivetor direção* do plano $\mathbf{D} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. A Equação (4.14) é equivalente a

$$\mathbf{D} \wedge \overrightarrow{AX} = 0$$

que é a equação cartesiana do plano. A exemplo de uma reta no plano, muitas vezes conhecemos um ponto A do plano e uma reta perpendicular a ele. Nesse caso também é possível escrever imediatamente a equação do plano. Se $\mathbf{n}$ é o vetor direção da reta perpendicular ao plano, então

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$$

é a equação cartesiana do plano em questão.

Ângulo entre dois planos. Sejam $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ dois planos com bivetores-direção $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, respectivamente. Se eles são paralelos ou coincidentes define-se o ângulo entre eles como sendo zero. Caso contrário, eles se interceptam segundo uma reta, digamos $\mathbf{l}$. Seja P um ponto qualquer em $\mathbf{l}$; um plano passando por P e ortogonal a $\mathbf{l}$, define um reta, digamos $\mathbf{r}$, em $\boldsymbol{\alpha}$ e outra reta, digamos $\mathbf{s}$, em $\boldsymbol{\beta}$. Os ângulos formados por essas retas independe de P. Define-se o ângulo entre $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ como sendo o ângulo entre as retas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$. Sejam $\mathbf{u} = \mathbf{AI}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{BI}$. O vetor $\mathbf{u}$ é ortogonal ao bivetor $\mathbf{A}$ e, portanto, ortogonal à reta $\mathbf{r}$. Analogamente, conclui-se que o vetor $\mathbf{v}$ é ortogonal à reta $\mathbf{s}$. Seja θ o ângulo entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$, então

$$\cos(\theta) = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|}$$

ou,alternativamente,

$$\tan(\theta) = \frac{\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\|}{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|} = \frac{\|[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\|}{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|}$$

se os planos não são ortogonais. Para a segunda igualdade na última equação, veja Exercício 4.23.

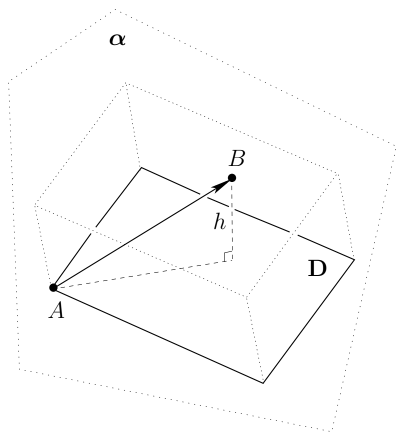

Figura 4.2: Distância de um ponto a um plano.

Distância de um ponto a um plano. A dedução da fórmula da distância de um ponto a um plano é similar àquela de um ponto à uma reta. Sejam P um ponto e $\boldsymbol{\alpha}$ um plano determinado pelo ponto A e pelo bivetor-direção $\mathbf{D}$. A norma do trivetor $\mathbf{D} \wedge \overrightarrow{AP}$ é volume do paralelepípedo determinado por $\overrightarrow{AP}$ e qualquer paralelogramo representante do bivetor $\mathbf{D}$ no plano $\boldsymbol{\alpha}$. Mas o volume de um paralelogramo é o produto de sua altura h pela área de sua base. Tomando como base o paralelogramo $\mathbf{D}$, temos $h = \text{dist}(P, \boldsymbol{\alpha})$. Logo $\|\mathbf{D} \wedge \overrightarrow{AP}\| = \|\mathbf{D}\|h = \|\mathbf{D}\| \,\text{dist}(P, \boldsymbol{\alpha})$. Ou seja,

$$\text{dist}(P, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\|\mathbf{D} \wedge \overrightarrow{AP}\|}{\|\mathbf{D}\|}$$

que é completamente similar à formula da distância de um ponto à uma reta.

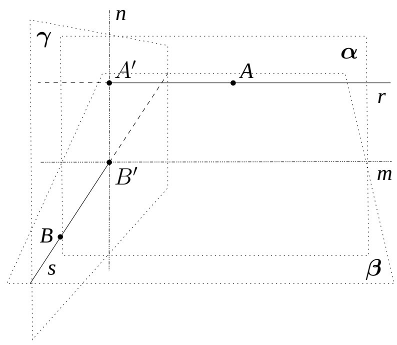

Figura 4.3: Distância entre duas retas reversas.

Distância entre duas retas. No espaço aparece a possibilidades de retas reversas, isto é, retas não-paralelas que não se interceptam. Nesse caso o conceito de distância entre retas torna-se relevante. Sejam $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ retas reversas determinadas por pontos A, B e vetores-direção $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, respectivamente. Seja $\boldsymbol{\beta}$ o plano determinado pelo ponto B e pelo bivetor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Como o ponto B pertence ao plano $\boldsymbol{\beta}$ e o vetor $\mathbf{b}$ tem representante nesse plano, a reta $\mathbf{s}$ está inteiramente contida em $\boldsymbol{\beta}$. Similarmente, como o vetor $\mathbf{b}$ está representado no plano $\boldsymbol{\beta}$, a reta $\mathbf{r}$ não intercepta esse plano, pois caso contrário, estaria inteiramente contida nele, contradizendo a hipótese de que as retas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ são reversas. Sejam $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ planos contendo as retas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$, respectivamente, e ortogonais ao plano $\boldsymbol{\beta}$. Como são ortogonais, os planos $\boldsymbol{\alpha}$ intercepta o plano $\boldsymbol{\beta}$ segundo uma reta, digamos $\mathbf{m}$. As retas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{m}$ são paralelas, pois caso contrário, por estarem em um mesmo plano, elas se interceptariam e, consequentemente, $\mathbf{r}$ teria um ponto comum com o plano $\boldsymbol{\beta}$, possibilidade essa já descartada. As retas $\mathbf{s}$ e $\mathbf{m}$ não são paralelas, pois $\mathbf{s}$ paralela a $\mathbf{m}$ e $\mathbf{m}$ paralela a $\mathbf{r}$ implicaria $\mathbf{s}$ paralela a $\mathbf{m}$, contradizendo mais um vez a hipótese de reversão entre as retas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$. Logo, $\mathbf{m}$ e $\mathbf{s}$ são retas não-paralelas, contidas no mesmo plano $\boldsymbol{\beta}$ e, portanto, se interceptam, digamos no ponto B'. Seja $\mathbf{n}$ a reta que contém o ponto B' e é ortogonal ao plano $\boldsymbol{\beta}$. A reta $\mathbf{n}$ está contida no plano $\boldsymbol{\alpha}$, pois caso contrário existiriam dois planos ortogonais ao plano $\boldsymbol{\beta}$ contendo a reta $\mathbf{m}$. Como $\mathbf{m}$ é paralela a $\mathbf{r}$ e $\mathbf{n}$ é perpendicular a $\mathbf{m}$, segue que $\mathbf{n}$ intercepta, perpendicularmente, a reta $\mathbf{r}$ em um ponto, digamos A'. Como o segmento $A'B'$ é perpendicular a ambas as retas, tem-se $\operatorname{dist}(A', B') \leq \operatorname{dist}(X, B') \leq \operatorname{dist}(X, Y)$, quaisquer que sejam os pontos X e Y nas retas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$, respectivamente. Define-se a distância entre as retas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ por $\operatorname{dist}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \operatorname{dist}(A', B')$. Como as retas $\mathbf{m}$ e $\mathbf{r}$ são paralelas e os planos $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ são ortogonais, tem-se

$$\operatorname{dist}(A, \boldsymbol{\beta}) = \operatorname{dist}(A', B') = \operatorname{dist}(\mathbf{r}, \mathbf{s})\,.$$

Portanto, usando a fórmula de distância entre um ponto e um plano com $\mathbf{D} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, obtem-se

$$\operatorname{dist}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \frac{\|\mathbf{D} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\mathbf{D}\|}\,.$$

Se as retas são paralelas, define-se $\operatorname{dist}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \operatorname{dist}(A, \mathbf{s})$. Se elas não são paralelas nem reversas, então elas se interceptam e define-se $\operatorname{dist}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = 0$. Nesse último caso, a fórmula acima continua válida. Observe a similaridade que existe entre as fórmula de distância entre um ponto e uma reta e a fórmula equivalente para a distância entre retas.

Exemplo 4.6. Sejam $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ as retas determinadas pelos pontos $A(2, 0, -5)$ e $B(1, -6, -3)$ e vetores-direção $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1$ e $\mathbf{b} = -2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, respectivamente. Para calcular a distância entre $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ precisamos de

$$\mathbf{D} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{e}_1 \wedge (-2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = -2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3\,,$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \wedge \overrightarrow{AB} &= (-2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) \wedge (-\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3) \\ &= 2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{dist}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \frac{\|\mathbf{D} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\mathbf{D}\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Intersecção de uma reta com uma plano. Se uma reta e um plano estão em posição geral, isto é, a reta não está contida no plano e nem é paralela a ele, a intersecção entre eles é um ponto. Podemos determinar esse ponto, a exemplo de duas retas no plano. Digamos que a reta está determinada pelo ponto A e pelo vetor direção $\mathbf{d}$ e o plano está determinado pelo ponto B e pelo bivetor direção $\mathbf{D}$. A dedução da fórmula segue os mesmos passos do cálculo da intersecção entre duas retas no plano. Se um ponto P pertence simultaneamente à reta e ao plano dados, então $\overrightarrow{AP}\wedge\mathbf{d} = 0$ e $\overrightarrow{BP}\wedge\mathbf{D} = 0$. Então por um lado, existe um número real t_0 tal que

$$\overrightarrow{AP} = t_0\mathbf{d}\,. \tag{4.15}$$

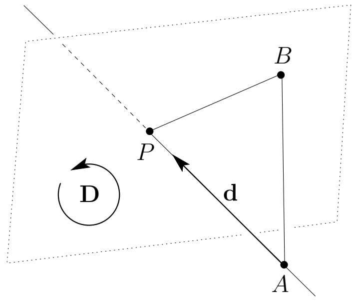

Figura 4.4: Intersecção de uma reta com um plano.

Por outro lado,

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BA} + t_0\mathbf{d}\,.$$

Logo, substituindo $\overrightarrow{BP}$ na equação cartesiana do plano, tem-se

$$(\overrightarrow{BA} + t_0\mathbf{d}) \wedge \mathbf{D} = 0$$

e resolvendo para t_0 e substituindo na Equação (4.15), obtém-se

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB} \wedge \mathbf{D}}{\mathbf{d} \wedge \mathbf{D}}\mathbf{d}\,, \tag{4.16}$$

que determina a posição do ponto P a partir do ponto A. Note que o trivetor $\mathbf{d} \wedge \mathbf{D}$ é não-nulo se e somente se a reta e o plano se encontram em posição geral.

Exemplo 4.7. Sejam $\mathbf{r}$ e $\boldsymbol{\pi}$ a reta e o plano determinados pelos pontos $A(3, 4, -3)$, $B(2, 3, 1)$ e pelos vetores direção $\mathbf{d} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ e normal $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, respectivamente. Determinaremos a intersecção de $\mathbf{r}$ e $\boldsymbol{\pi}$. O bivetor $\mathbf{D} = \mathbf{n}\mathbf{I}$ é ortogonal ao vetor $\mathbf{n}$, logo possui representante em $\boldsymbol{\pi}$. Passemos aos cálculos:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \wedge \mathbf{D} &= (-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3) \wedge (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \\
&= 4\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = 4\mathbf{I} \\
\mathbf{d} \wedge \mathbf{D} &= (-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) \wedge (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \\
&= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{I}\,.
\end{aligned}$$

Segue que

$$\frac{\overrightarrow{AB} \wedge \mathbf{D}}{\mathbf{d} \wedge \mathbf{D}} = \frac{4\mathbf{I}}{\mathbf{I}} = 4\,.$$

Logo, $\overrightarrow{AP} = -4\mathbf{e}_1 + 8\mathbf{e}_2$ e, portanto, $P(-1, 12, -3)$. Note que os cálculos continuam válidos mesmo que os sistema de coordenadas não seja ortonormal.

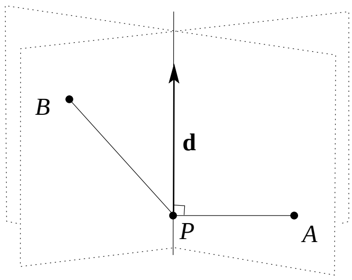

Figura 4.5: Intersecção de dois planos.

Intersecção de dois planos. Para concluir esta secção, mostraremos como obter a intersecção de dois planos. Sejam $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ dois planos, em posição geral, determinados por pontos A, B e bivetores-direção $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, respectivamente. A intersecção entre $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ é uma reta; seja $\mathbf{r}$ essa reta. Para obter $\mathbf{r}$ é suficiente obter sua direção e um de seus pontos. Seja

$$\mathbf{a} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{I}\,.$$

Sabemos que $\mathbf{a}$ é perpendicular a $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ e, portanto, paralelo a ambos os bivetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Logo $\mathbf{a}$ é uma direção de $\mathbf{r}$. Resta, portanto obter um ponto P qualquer de $\mathbf{r}$. Como o vetor $\mathbf{a}$ é paralelo ao bivetor $\mathbf{A}$, tem-se que o vetor $\mathbf{d} := \mathbf{aA}$ possui representante no plano $\boldsymbol{\alpha}$. Como $\mathbf{d}$ é ortogonal a $\mathbf{a}$ e o último é a direção da reta $\mathbf{r}$, segue-se que a reta $\mathbf{s}$ determinada pelo ponto A e pelo vetor direção $\mathbf{d}$ intersecta o plano $\boldsymbol{\beta}$ – e a reta $\mathbf{r}$ – em um único ponto, digamos P, pois, caso contrário, os planos seriam coincidentes. Portanto, o problema fica reduzido a se encontrar o intersecção entre uma reta e um plano; problema esse já abordado:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB} \wedge \mathbf{B}}{\mathbf{d} \wedge \mathbf{B}}\mathbf{d}.$$

Vamos desenvolver o segundo membro da equação acima: por um lado,

$$2\,\mathbf{d} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{dB} + \mathbf{Bd} = \mathbf{aAB} + \mathbf{BaA}\,.$$

Como o vetor $\mathbf{a}$ é paralelo aos bivetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, ele anticomuta com ambos os bivetores. Logo,

$$2\,\mathbf{d} \wedge \mathbf{B} = (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})\mathbf{a} = 2\,[\mathbf{A}, \mathbf{B}]^2\mathbf{I}\,;$$

por outro lado,

$$\mathbf{d} = \mathbf{aA} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{IA}\,;$$

como ambos os elementos $\overrightarrow{AB} \wedge \mathbf{B}$ e $\mathbf{d} \wedge \mathbf{B}$ são trivetores, eles comutam com todos os multivetores envolvidos, portanto, podemos concluir que, em termo dos bivetores-direção $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, o ponto P fica localizado a partir do ponto A por

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB} \wedge \mathbf{B}}{[\mathbf{A}, \mathbf{B}]}\mathbf{A}\,.$$

Exemplo 4.8. Determinaremos em coordenadas cartesianas uma equação paramétrica para a reta determinada pela interseção de dois planos dados. Sejam $\boldsymbol{\pi}_1$ e $\boldsymbol{\pi}_2$ planos determinados pelos pontos $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$ e pelos bivetores $\mathbf{A} = 2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{B} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1$, respectivamente. A direção da reta é dada por $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{I}$. Como

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= (2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) \\ &= 2 - 2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\,,\end{aligned}$$

a direção procurada é

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{I} &= (-2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1)\mathbf{e_1 e_2 e_3} \\ &= 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Para determinar um ponto na reta precisamos de

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \wedge \mathbf{B} &= (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \wedge (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) = -\mathbf{I} \\ \frac{\overrightarrow{AB} \wedge \mathbf{B}}{[\mathbf{A}, \mathbf{B}]} &= -\frac{[\mathbf{A}, \mathbf{B}]}{\|[\mathbf{A}, \mathbf{B}]\|^2}(-\mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{6}(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)\,.\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{1}{6}(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)(2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) \\ &= \frac{1}{6}(-2\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)\,.\end{aligned}$$

Logo, $P(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6})$. Portanto uma equação paramétrica para a reta procurada é

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{3} + 2t \\ y &= \frac{5}{6} + \ \ t \\ z &= \frac{7}{6} - \ \ t\,.\end{aligned}$$

4.4 Reflexões e Rotações

A álgebra geométrica permite representar as reflexões em torno de um plano e as rotações de maneira muito simples e elegante.

Reflexões em torno de um plano. Considere um bivetor $\mathbf{B}$ unitário qualquer. Vimos na seção anterior que o vetor $\mathbf{n} = -\mathbf{BI}$ é um vetor unitário ortogonal ao plano gerado por $\mathbf{B}$. Dado um vetor $\mathbf{u}$ qualquer temos

$$\mathbf{u} = \mathbf{n}^2\mathbf{u} = \mathbf{n}(\mathbf{nu}) = \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{n}\wedge\mathbf{u}) = \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}) + \mathbf{n}(\mathbf{n}\wedge\mathbf{u}).$$

Convidamos o leitor a praticar a teoria vista até aqui mostrando que $\mathbf{u}_{||} = \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})$ e $\mathbf{u}_{\perp} = \mathbf{n}(\mathbf{n}\wedge\mathbf{u})$, ou seja, as parcelas no último membro da sequência de igualdades acima são exatamente as projeções paralelas e ortogonais ao vetor $\mathbf{n}$. Portando, podemos ver que a reflexão de $\mathbf{u}$ é dada pelo vetor

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}' &= \mathbf{u}_{\perp} - \mathbf{u}_{||} \\
&= \mathbf{n}(\mathbf{n}\wedge\mathbf{u}) - \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}) \\
&= -(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})\mathbf{n} - (\mathbf{n}\wedge\mathbf{u})\mathbf{n} \\
&= -(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{n}\wedge\mathbf{u})\mathbf{n} \\
&= -\mathbf{nun}.
\end{aligned}$$

Vamos verificar que a reflexão preserva ângulos entre vetores. Realmente,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{nun})\cdot(\mathbf{nvn}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{nunnvn} + \mathbf{nvnnun}) \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{nuvn} + \mathbf{nvun}) \\
&= \mathbf{n}\frac{1}{2}(\mathbf{uv} + \mathbf{vu})\mathbf{n} \\
&= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.
\end{aligned}$$

Rotações. Uma rotação R fica completamente determinada quan-do sabemos o plano em que ela ocorre, seu sentido e a magnitude do ângulo de rotação θ, Figura 4.6. Portanto, podemos inferir que o conhecimento sobre rotações no plano é suficiente para determinarmos as rotações no espaço. De fato, como veremos agora, é exatamente isto que o corre. Sejam $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$ dois vetores unitários no plano de rotação de R e cujo ângulo seja $\theta/2$. Tudo que precisamos mostrar é que a componente ortogonal ao plano de rotação de um vetor $\mathbf{u}$ é deixada fixa pela transformação $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{nmumn}$, pois já sabemos que tal transformação perfaz uma rotação de um ângulo igual ao dobro do ângulo entre $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$ no sentido de $\mathbf{m}$ para $\mathbf{n}$, confira Equação (3.5). Primeiro lembremos que a componente ortogonal ao plano gerado por $\mathbf{m}\wedge\mathbf{n}$ é dada por $(\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})\mathbf{w}$, em que $\mathbf{w} = -(\mathbf{m}\wedge\mathbf{n})\mathbf{I}$. Agora

$$\begin{aligned}
\mathbf{nm}\big[(\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})\mathbf{w}\big]\mathbf{mn} &= (\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})\mathbf{nm}\big[-(\mathbf{m}\wedge\mathbf{n})\mathbf{I}\big]\mathbf{mn}\\
&= -(\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})\mathbf{nm}\frac{1}{2}(\mathbf{mn}-\mathbf{nm})\mathbf{mnI}\\
&= -(\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})\frac{1}{2}(\mathbf{nmmn}-\mathbf{nmnm})\mathbf{mnI}\\
&= -(\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})\frac{1}{2}(\mathbf{mn}-\mathbf{nm})\mathbf{I}\\
&= -(\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{m}\wedge\mathbf{n})\mathbf{I}\\
&= (\mathbf{w}\cdot\mathbf{u})\mathbf{w}.
\end{aligned}$$

Portanto, as rotações no espaço são representadas exatamente da mesma forma que no plano $R(\mathbf{u}) = \mathbf{mnunm}$.

A expressão obtida para as rotações permite concluir, para E, um importante resultado sobre caracterização de rotações conhecido como Teorema de Cartan-Dieudonné: *Toda rotação é dada pela composição de duas reflexões em torno de planos ortogonais a vetores do plano onde ocorre a rotação,* Cartan (1966) .

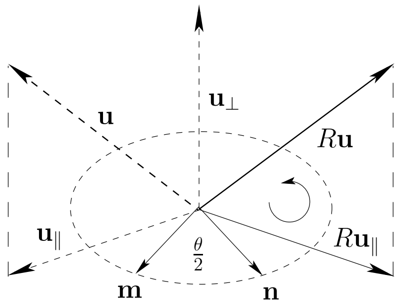

Figura 4.6: Rotação do vetor $\mathbf{u}$ em torno do eixo perpendicular ao plano de $\mathbf{m}\wedge\mathbf{n}$.

Exemplo 4.9. Dado dois vetores unitários $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ construiremos uma rotação que leva $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$. Para isso basta construir dois vetores no plano gerado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ cuja o ângulo orientado seja metade do ângulo formado por eles. Como são vetores unitários sua soma está na bissetriz do ângulo formado por eles, então defina

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|}\,.$$

Com isso a rotação desejada é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{nv} &= \frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|}\mathbf{v}\\
&= \frac{1+\mathbf{uv}}{\sqrt{2(1+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}}\,.
\end{aligned}$$

Realmente,

$$
\begin{aligned}
R\mathbf{u} &= \mathbf{vnunv} \\
&= \frac{1+\mathbf{vu}}{\sqrt{2(1+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}}\mathbf{u}\frac{1+\mathbf{uv}}{\sqrt{2(1+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}} \\
&= \frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{\sqrt{2(1+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}}\frac{1+\mathbf{uv}}{\sqrt{2(1+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}} \\
&= \frac{2\mathbf{v}+\mathbf{u}+\mathbf{vuv}}{2(1+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})} \\
&= \frac{2\mathbf{v}+\mathbf{v}(\mathbf{vu}+\mathbf{uv})}{2(1+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})} \\
&= \frac{\mathbf{v}}{1+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}\Big(1+\frac{\mathbf{vu}+\mathbf{uv}}{2}\Big) \\
&= \mathbf{v}\,.
\end{aligned}
$$

4.5 Eletromagnetismo

Nesta seção ilustraremos, com mais um exemplo, o poder de síntese do formalismo da álgebra geométrica: as equações de Maxwell para o eletromagnetismo serão resumidas em uma única equação por meio dos recursos apresentados ao londo destas notas. Não é nossa intenção apresentar detalhes dos conceitos físicos envolvidos nas equações, embora a álgebra geométrica muitas vezes mostre-se mais adequada para descrever esses conceitos que a álgebra vetorial clássica. O intuito aqui é apenas reescrever as equações do eletromagnetismo usando os recursos disponibilizados pela álgebra geométrica. Para esta seção é necessário algum conhecimento sobre diferenciação de funções e campos de vetores, além de conhecimentos básicos de Física, mas mesmo o leitor iniciante em matemática compreenderá facilmente como rescrever as equações usando o que foi visto ao longo deste capítulo.

Quando escritas em coordenadas, as leis do eletromagnetismo são descritas por um conjunto de oito equações. Se escritas por meio de álgebra vetorial clássica são necessárias apenas 4 equações:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{4.17}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{4.18}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{4.19}$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \tag{4.20}$$

em que $\mathbf{E}$ é campo elétrico, $\mathbf{B}$ é o campo magnético, ρ é a densidade de carga elétrica, $\mathbf{J}$ a densidade de corrente elétrica real e c a velocidade da luz no vácuo. A definição do operador ∇ virá a seguir.

O operador ∇. As definições envolvendo o operador ∇ serão apresentadas por meio de um sistema fixo de coordenadas ortonormais $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ para o espaço E. Embora esse operador possa ser definido sem referência a coordenadas Hestenes e Sobczyk (1984), optamos por assim fazê-lo para que os pré-requisitos de cálculo fossem os mais simples possíveis. Podemos, portanto, nos referir a um ponto $P(x, y, z)$ de E indicando-lhe as coordenadas. Nesse contexto, indicaremos os operadores derivadas parciais, como de costume, por $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. O operador ∇ será definido de modo a ter as mesmas qualidades inerentes à multiplicação por vetores na álgebra geométrica. Assim, formalmente, escrevemos

$$\nabla := \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

e, em seguida, esclarecemos o significado do membro direito da igualdade acima. Desse modo, para uma função $f : E \to \mathbb{R}$, define-se

$$\nabla f := \mathbf{e}_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial f}{\partial z}$$

que é um campo de vetores conhecido como *gradiente* da função f. Para um *campo de vetores*, isto é, um aplicação $\psi : E \to V$, introduziremos dois operadores intermediários antes de definir o operador ∇. Para isso escreva-se ψ no sistema de coordenadas, isto é, $\psi = \psi_1 \mathbf{e}_1 + \psi_2 \mathbf{e}_2 + \psi_2 \mathbf{e}_2$ e defina-se

$$\nabla \cdot \psi := \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z}.$$

e

$$\nabla \wedge \psi := (\frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial y})\mathbf{i} + (\frac{\partial \psi_3}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z})\mathbf{j} + (\frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x})\mathbf{k}\,.$$

Com essas definições, estamos prontos para definir como o operador ∇ age sobre campos de vetores:

$$\nabla \psi = \nabla \cdot \psi + \nabla \wedge \psi\,.$$

Observe que A fórmula acima concorda com distribuição formal do produto

$$\nabla \psi = \big(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}\big)\big(\psi_1 \mathbf{e}_1 + \psi_2 \mathbf{e}_2 + \psi_3 \mathbf{e}_3\big)\,.$$

As quantidades $\operatorname{div}\psi := \nabla\cdot\psi$ e $\operatorname{rot}\psi = \nabla\times\psi := -(\nabla\wedge\psi)\mathbf{I}$ são conhecidas como divergência e rotacional do campo ψ, respectivamente.

Mais geralmente, se $\mathbf{A} : E \to \mathcal{A}_3$ for um campo de multivetores quaisquer, isto é, uma aplicação que a cada ponto de E associa um elemento da álgebra geométrica $\mathcal{A}_3$, define-se

$$\nabla\mathbf{A} = \mathbf{e}_1\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} + \mathbf{e}_2\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} + \mathbf{e}_3\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}.$$

Com estas definições o operador ∇ possui todas as propriedades de um vetor.

As equações de Maxwell na Álgebra Geométrica. As definições de cálculo acima reescritas na linguagem da álgebra geométrica permitem agrupar rapidamente as equações de Maxwell em uma única equação. Primeiro reescrevemos a Equação(4.19):

$$\nabla\wedge\mathbf{E} = (\nabla\times\mathbf{E})\mathbf{I} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{BI})$$

em que $\mathbf{BI}$ agora é o campo de bivetores que corresponde ao campo magnético. Somando o resultado acima com a Equação (4.17) temos

$$\nabla\mathbf{E} = \big(4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{BI})\big). \tag{4.21}$$

Resta agora reescrever o restante das equações em função de $\mathbf{BI}$. Mas para isso basta calcular

$$\nabla(\mathbf{BI}) = (\nabla\mathbf{B})\mathbf{I} = (\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{I} + (\nabla\wedge\mathbf{B})\mathbf{I} = -\nabla\times\mathbf{B}\,.$$

Logo, usando-se as Equações (4.18) e (4.20) tem-se

$$\nabla(\mathbf{BI}) = -\big(\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\big)\,. \tag{4.22}$$

Finalmente, somando-se as Equações (4.21) e (4.22) tem-se

$$\nabla(\mathbf{E}+\mathbf{BI}) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}+\mathbf{BI}) = 4\pi(\rho - \frac{\mathbf{J}}{c})\,.$$

ou, equivalentemente,

$$(\nabla + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t})(\mathbf{E}+\mathbf{BI}) = 4\pi(\rho - \frac{\mathbf{J}}{c})\,.$$

As equações de Maxwell para o eletromagnetismo ficam assim representadas por meio da álgebra geométrica por apenas uma equação envolvendo vetores e bivetores.

Exercícios

4.1. Sejam $\mathbf{u}$ um vetor e $\mathbf{B}$ um bivetor. Mostre que se $\mathbf{u}$ é ortogonal ao plano de $\mathbf{B}$, então:

(a) $\mathbf{uB} = \mathbf{Bu}$;

(b) $(\mathbf{uB})^2 = -\|\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}\|^2$.

4.2. Seja $\mathbf{B} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, obtenha as componentes vetorial e trivetorial de $\mathbf{uB}$ em termos de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$.

4.3. Sejam $\mathbf{v}$ um vetor e $\mathbf{B}$ um bivetor. Mostre que valem as seguinte identidades:

(a) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{vB} - \mathbf{Bv}) = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}$;

(b) $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{vB} + \mathbf{Bv}) = \mathbf{B} \wedge \mathbf{v}$.

4.4. Determine geometricamente todas as soluções da equação

$$\overrightarrow{AX}\,\mathbf{B} + \mathbf{B}\,\overrightarrow{XA} = 0\,.$$

4.5. Determine em coordenadas cartesianas as soluções para o sistema de equações

$$\begin{cases} \overrightarrow{AX} \wedge \mathbf{B} = 0; \\ (\overrightarrow{AX})^2 = 1\,. \end{cases}$$

Descreva o conjunto solução geometricamente.

4.6. Determine a interseção dos planos determinados pelos pontos $A(0,1,0)$, $B(1,0,1)$, $C(0,2,3)$ e bivetores $\mathbf{A} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i}+\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = -\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

4.7. Descreva o conjunto solução do sistema de equações

$$\begin{cases} \mathbf{x} \wedge \mathbf{A} = 0 \\ \mathbf{x} \wedge \mathbf{B} = 0\,, \end{cases}$$

em que $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ são bivetores.

4.8. Calcule o volume do tetraedro $OABC$, sabendo que $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ medem respectivamente 2, 3, 4 e os ângulos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}A$ medem respectivamente $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$.

4.9. Mostre que $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ é uma base ortonormal para o espaço dos bivetores.

4.10. Sejam $\boldsymbol{\pi}$ o plano determinado por $A(3,-1,-2)$ e o vetor normal $\mathbf{n} = 5\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$; $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ as retas determinadas pelos pontos $B(0,5,-1)$, $C(4,2,1)$ e vetores direções $\mathbf{d}_1 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, respectivamente; e um ponto $P(2,3,1)$. A respeito dos objetos definidos responda os itens abaixo:

(a) Calcule a distância entre o ponto P e o plano $\boldsymbol{\pi}$;

(b) Calcule a distância entre as retas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$;

(c) Determine o ponto de interseção da reta $\mathbf{r}$ com o plano $\boldsymbol{\pi}$.

4.11. Mostre que

$$\alpha + \beta\mathbf{i} + \delta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k} = (\alpha + \beta\mathbf{i}) + (\delta + \gamma\mathbf{i})\mathbf{j}\,.$$

4.12. Seja $\mathbf{T}$ um trivetor. Mostre que

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = \mathbf{T}^2 = -\|\mathbf{T}\|^2\,.$$

4.13. Sejam $\mathbf{u}$ um vetor, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ bivetores e $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ trivetores. Mostre que:

(a) $\mathbf{uR} = \langle\mathbf{uR}\rangle_2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{R}$;

(b) $\mathbf{BC} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{C} + \langle\mathbf{BC}\rangle_2$;

(c) $\mathbf{BR} = \langle\mathbf{BR}\rangle_1 = \mathbf{B}\cdot\mathbf{R}$;

(d) $\mathbf{RS} = \langle\mathbf{RS}\rangle_0 = \mathbf{R}\cdot\mathbf{S}$;

4.14. Sejam $\mathbf{R} = \mathbf{R}_m$ e $\mathbf{S} = \mathbf{S}_n$ Demonstre que

$$\mathbf{RS} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{S} + \langle\mathbf{RS}\rangle_{|m-n|+2}\,.$$

4.15. Defina produto interno entre dois multivetores $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$ por

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{S} := \sum_{m,n=0}^{3} \mathbf{R}_m\cdot\mathbf{S}_n$$

Mostre que se α é um número real e $\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$ são multivetores, então

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{R}+\mathbf{S})\cdot\mathbf{T} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{T} + \mathbf{S}\cdot\mathbf{T}\\
&\mathbf{R}\cdot(\mathbf{S}+\mathbf{T}) = \mathbf{R}\cdot\mathbf{S} + \mathbf{R}\cdot\mathbf{T}\\
&(\alpha\mathbf{R})\cdot\mathbf{S} = \mathbf{R}\cdot(\alpha\mathbf{S}) = \alpha(\mathbf{R}\cdot\mathbf{S})\,.
\end{aligned}$$

4.16. Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ bivetores. Use que $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ para mostrar que

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}]^2 = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 - \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2\,.$$

Compare com a Proposição 2.1.

4.17. Mostre que para quaisquer número real α e bivetores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ valem:

L1 $[\alpha\mathbf{A},\mathbf{B}] = [\mathbf{A},\alpha\mathbf{B}] = \alpha[\mathbf{A},\mathbf{B}]$;

L2 $[\mathbf{A}+\mathbf{B},\mathbf{C}] = [\mathbf{A},\mathbf{C}] + [\mathbf{B},\mathbf{C}]$;

L3 $[\mathbf{A},\mathbf{B}] = -[\mathbf{B},\mathbf{A}]$;

L4 $[\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]] + [\mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] + [\mathbf{B},[\mathbf{C},\mathbf{A}]] = 0\,.$

4.18. Sejam $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$, mostre que o colchete entre eles pode ser calculado simbolicamente como

$$[\mathbf{A},\mathbf{B}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\,.$$

4.19. Defina o *produto vetorial* entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ por $\mathbf{u}\times\mathbf{v} := -(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\mathbf{I}$. Mostre que:

(a) $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ é um vetor ortogonal aos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$;

(b) $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\|$.

4.20. Determine um vetor unitário ortogonal aos vetores $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$.

4.21. Mostre que para quaisquer número real α e vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ valem:

V1 $(\alpha\mathbf{u})\times\mathbf{v} = \mathbf{u}\times(\alpha\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$;

V2 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{w} + \mathbf{v}\times\mathbf{w}$;

V3 $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -\,\mathbf{v}\times\mathbf{u}$;

V4 $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) + \mathbf{w}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) + \mathbf{v}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{u}) = 0\,.$

4.22. Mostre que o produto vetorial entre os vetores $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2+u_3\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ pode ser calculado simbolicamente por

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}\,.$$

4.23. Sejam $\mathbf{u}$ de $\mathbf{v}$ vetores. Coloque $\mathbf{A} := \mathbf{u}\mathbf{I}$ e $\mathbf{B} := \mathbf{v}\mathbf{I}$. Mostre que

(a) $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = -\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\,;$

(b) $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})\mathbf{I}\,.$

4.24. Seja $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ bivetores. Coloque $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{I}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{I}$. Mostre que

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\,;$

(b) $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -[\mathbf{A}, \mathbf{B}];$

(c) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{I}\,.$

4.25. O *produto misto* entre os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ é a quantidade $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$, definida por

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]\mathbf{I}\,.$$

Mostre que para todos número real α e vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ valem:

(a) $[\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \alpha\mathbf{w}] = \alpha[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}];$

(b) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}];$

(c) $[\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}] = [\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{z}] + [\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}];$

(d) $|[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]| = \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}\|\,.$

4.26. Sejam $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vetores, mostre que

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}\,.$$

4.27. Dizemos que uma base ordenada $\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{w}\}$ é positiva se $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] > 0$ e negativa caso caso contrário. Mostre que

(a) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}] = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2\,;$

(b) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores linearmente independentes, então o conjunto ordenado $\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{u},\ \mathbf{v},\ \mathbf{u} \times \mathbf{v}\}$ é sempre uma base ordenada positiva.

4.28. Sejam $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ as retas determinadas pelos pontos A, B e pelos vetores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, respectivamente. Mostre que $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ são coplanares se e somente se $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \overrightarrow{AB}] = 0\,.$

4.29. Seja $\mathbf{r}$ a reta determinada pelo ponto A e vetor direção $\mathbf{d}$ e B um ponto qualquer. Determine C em $\mathbf{r}$ tal que a reta determinada por B e C seja perpendicular a $\mathbf{r}$.

4.30. Use as propriedades formais do produto geométrico para mostrar que

$$\begin{aligned}\Delta &:= (\mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial z})(\mathbf{e}_1\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3\frac{\partial}{\partial z}) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.\end{aligned}$$

4.31. Sejam $U : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbf{A} : E \times \mathbb{R} \to V$ aplicações diferenciáveis e $\varphi := -U + \mathbf{A}$. Suponha que

$$\begin{aligned}&\mathbf{E} = -\nabla U - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \\ &\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial U}{\partial t} = 0\,.\end{aligned}$$

Mostre que

$$\big(\nabla - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\big)\varphi = \mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{I}$$

e

$$\big(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\big)\varphi = 4\pi(\rho - \frac{\mathbf{J}}{c})\,.$$

Bibliografia

Barbosa, J. L. M. (1994). *Geometria Euclidiana Plana*. Sociedade Brasileira de Matemática.

Cartan, E. (1966). *The Theory of Spinors*. MIT Press.

Clifford, W. K. (1882). *Mathematical Papers*. Macmillan and co.

de Camargo, I. e Boulos, P. (2005). *Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial*. Prentice Hall, São Paulo, 3 edition.

Doran, C. e Lasenby, A. (2007). *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge University Press.

dos Santos, N. M. (1970). *Vetores e Matrizes*. Livros Técnicos e Cientificos.

Euclides (2009). *Os Elementos*. UNESP. Tradução e Introdução de Irineu Bicudo.

Grassmann, H. (1995). *A New Branch of Mathematics: The* Ausdehnungslehre *of 1844 and Other Works*. Open Court.

Grassmann, H. (2000). *Extension Theory*. American Mathematical Society.

Hestenes, D. (1999). *New Foundations for Classical Mechanics*, volume 99. Springer.

Hestenes, D. e Sobczyk, G. (1984). *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*, volume 5 de *Fundamental Theories of Physics*. Springer.

Apêndice

Mudança de bases

Seja $\boldsymbol{\alpha} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ uma base ordenada, vamos relacionar $\mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}} =: (u_1, u_2, u_3)^T$ com $\mathbf{v}_{\boldsymbol{\beta}} =: (v_1, v_2, v_3)^T$. Para isso escrevamos os vetores de $\boldsymbol{\alpha}$ como combinação linear dos vetores de $\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \alpha_{11}\mathbf{v}_1 + \alpha_{21}\mathbf{v}_2 + \alpha_{31}\mathbf{v}_3 \\
\mathbf{u}_2 &= \alpha_{12}\mathbf{v}_1 + \alpha_{22}\mathbf{v}_2 + \alpha_{32}\mathbf{v}_3 \\
\mathbf{u}_3 &= \alpha_{13}\mathbf{v}_1 + \alpha_{23}\mathbf{v}_2 + \alpha_{33}\mathbf{v}_3 \,.
\end{aligned}$$

Multiplicando as equações acima por u_1, u_2 e u_3, respectivamente

$$\begin{aligned}
u_1\mathbf{u}_1 &= u_1\alpha_{11}\mathbf{v}_1 + u_1\alpha_{21}\mathbf{v}_2 + u_1\alpha_{31}\mathbf{v}_3 \\
u_2\mathbf{u}_2 &= u_2\alpha_{12}\mathbf{v}_1 + u_2\alpha_{22}\mathbf{v}_2 + u_2\alpha_{32}\mathbf{v}_3 \\
u_3\mathbf{u}_3 &= u_3\alpha_{13}\mathbf{v}_1 + u_3\alpha_{23}\mathbf{v}_2 + u_3\alpha_{33}\mathbf{v}_3 \,.
\end{aligned}$$

Somando as três equações temos o vetor $\mathbf{v}$ escrito como combinação linear dos vetores da base β

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} =& (\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3)\mathbf{v_1} \\
&+ (\alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{23}u_3)\mathbf{v_2} \\
&+ (\alpha_{31}u_1 + \alpha_{32}u_2 + \alpha_{33}u_3)\mathbf{v_3} \,.
\end{aligned}$$

Daí conclui-se que

$$\begin{aligned}
v_1 &= \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3 \\
v_2 &= \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{23}u_3 \\
v_3 &= \alpha_{31}u_1 + \alpha_{32}u_2 + \alpha_{33}u_3
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

que escrevemos em forma abreviada como

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\beta}} = M_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{v}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

em que $M_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\alpha}} := (\alpha_{ij})_{3\times 3}$ é a chamada *matriz de mudança da base* $\boldsymbol{\alpha}$ para a base $\boldsymbol{\beta}$.

Exemplo 4.10. Seja $ABCDA'B'C'D'$ um cubo de lado 1. Sejam $\boldsymbol{\alpha} = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}\}$ e $\boldsymbol{\beta} = \{\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD'}\}$ bases para o espaço V. Vamos determinar a matriz mudança de base da base $\boldsymbol{\beta}$ para a base $\boldsymbol{\alpha}$. Para isso basta escrever cada vetor da base $\boldsymbol{\beta}$ como combinação linear da base $\boldsymbol{\alpha}$. Observe que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB'} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AD'} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \end{aligned}$$

logo $\overrightarrow{AB'}_{\boldsymbol{\alpha}} = (1,0,1)^T$, $\overrightarrow{AC}_{\boldsymbol{\alpha}} = (1,1,0)^T$ e $\overrightarrow{AD'}_{\boldsymbol{\alpha}} = (0,1,1)^T$. Portanto,

$$M_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

As matrizes de mudança de base gozam das seguintes propriedades, cujas demonstrações deixaremos como execício:

a) $M_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\alpha}} = \mathrm{Id}$;

b) $M_{\boldsymbol{\gamma}}^{\boldsymbol{\alpha}} = M_{\boldsymbol{\gamma}}^{\boldsymbol{\beta}} M_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\alpha}}$.

Orientação de Parelogramos e Paralelepípedos

O conhecimento sobre mudança de bases desenvolvido na seção anterior permite dar uma definição algébrica precisa da noção de equivalência de orientação de paralelogramos e de paralelepípedos orientados.

Equivalência de orientação para paralelogramos orientados. Sejam $ABCD$ e $A'B'C'D'$ dois paralelogramos orientados não-degenerados de mesma direção. Coloque

$$\mathbf{u}_1 := \overrightarrow{AB} \quad \mathbf{u}_2 := \overrightarrow{BC}$$

e

$$\mathbf{v}_1 := \overrightarrow{A'B'}, \quad \mathbf{v}_2 := \overrightarrow{B'C'}\,.$$

Então como os planos que contêm os paralelogramos são paralelos, os vetores em $\boldsymbol{\alpha} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e em $\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ geram o mesmo plano, do qual $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ são bases. As matrizes de mudança de base, satisfazem

$$\mathrm{Id} = M_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\alpha}} = M_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}} M_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\alpha}}\,.$$

Logo,

$$\det(M_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}})\det(M_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\alpha}}) = \det(M_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}} M_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\alpha}}) = 1$$

Concluímos daí que os determinantes dessas matrizes de mudança de base são ambos positivos ou ambos negativos. Diremos que os paralelogramos $ABCD$ e $A'B'C'D'$ têm a mesmo orientação se $\det(M_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\alpha}})$ – e, portanto, também $\det(M_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\beta}})$ – for positivo. Caso, contrário, diremos que eles têm orientação oposta.

Para mostrar que a noção de *mesma orientação* entre paralelogramos orientados está bem definida, precisamos mostrar que se começássemos pelo ponto B em vez de A, o determinante da matriz de mudança de base correspondente, $M_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\alpha}'}$, tem o mesmo sinal de $M_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\alpha}}$, em que $\boldsymbol{\alpha}' := \{\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2'\}$ e

$$\mathbf{u}_1' := \overrightarrow{BC} = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_2' := \overrightarrow{CD} = -\mathbf{u}_1\,.$$

De fato,

$$M_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\alpha}'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e, portanto,

$$\det(M_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\alpha}'}) = \det(M_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\alpha}} M_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\alpha}'}) = \det(M_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\alpha}})\,.$$

A noção de orientação é uma relação de equivalência para paralelogramos orientados.

Equivalência de orientação para paralelepípedos orientados. No que segue indicaremos por $ABCDA'B'C'D'$ um paralelepípedo orientado, não-degenerado, em que $ABCD$ é a face (paralelogramo) orientada que determina a orientação do paralelepípedo e AA', BB', CC' e DD' são as arestas emanantes da face $ABCD$, Figuras 2.2 e 2.4. Sejam $ABCDA'B'C'D'$ e $EFGHE'F'G'H'$ paralelepípedos orientados. Defina:

$$\mathbf{u}_1 := \overrightarrow{AB}, \quad \mathbf{u}_2 := \overrightarrow{BC} \quad \mathbf{u}_3 := \overrightarrow{CC'}$$

e

$$\mathbf{v}_1 := \overrightarrow{EF}, \quad \mathbf{v}_2 := \overrightarrow{FG} \quad \mathbf{v}_3 := \overrightarrow{GG'}\,.$$

Então, $\boldsymbol{\alpha} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e $\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ são base de V. Como no caso dos paralelogramos orientados, definimos a noção de ter a mesma orientação para paralelepípedos a partir do sinal dos determinantes das matrizes de mudança de base. Note que se começássemos com outra face, digamos $AA'B'B$, teríamos

$$\mathbf{u}'_1 := \overrightarrow{AA'} = \mathbf{u}_3, \quad \mathbf{u}'_2 := \overrightarrow{A'B'} = \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}'_3 := \overrightarrow{B'C'} = \mathbf{u}_2\,.$$

Portanto, para $\boldsymbol{\alpha}' := \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3\}$ temos,

$$M_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{\alpha}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que tem determinante um. Logo, $\det(M_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\alpha}'}) = \det(M_{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{\alpha}})$. O Leitor pode verificar os outros casos e concluir que *ter a mesma orientação* é um conceito bem definido também para paralelepípedos orientados.

Boa definição do produto exterior de vetor por bivetor – orientação. Com a notação da página 51, precisamos mostrar que as bases $\boldsymbol{\alpha} := \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ e $\boldsymbol{\alpha'} := \{\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}\}$ possuem a mesma orientação. De fato, sejam $\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ e $\boldsymbol{\beta'} = \{\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}\}$, então se

$$M_{\boldsymbol{\beta'}}^{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

têm-se que

$$M_{\boldsymbol{\alpha'}}^{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e, portanto,

$$\det M^{\boldsymbol{\alpha}}_{\boldsymbol{\alpha}'} = \det M^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\beta}'} = 1\,.$$

Isso mostra que o bivetor $\mathbf{B}$ determina a mesma orientação sobre $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}'$, independentemente de seus fatores.

Portanto, os trivetores $\mathbf{T}$ e $\mathbf{T}'$ possuem mesma orientação e mesma norma, logo o produto de um vetor por um bivetor está bem definido.

Índice