

MINICURSO – COLÓQUIO DE MATEMÁTICA DA REGIÃO NORTE
2014

Comitê Científico

Flávia Morgana de O. Jacinto (UFAM) - Coordenadora

Hugo Alex Carneiro Diniz (UFOPA)

Jorge Herbert Soares de Lira (UFC)

Marcelo Miranda Viana da Silva (IMPA-SBM)

Renato de Azevedo Tribuzy (UFAM)

Rodrigo Bissacot Proença (USP)

Rúbia Gonçalves Nascimento (UFPA)

Esta é mais uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática para os minicursos ministrados nos Colóquios.

Veja outras publicações da SBM, na livraria virtual que se encontra na página

<http://www.loja.sbm.org.br/>



Sociedade Brasileira de Matemática

2014

Introdução aos Sistemas Dinâmicos Unidimensionais

Carlos Bocker Neto
carlos@mat.ufpb.br

Departamento de Matemática
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Universidade Federal da Paraíba



Sociedade Brasileira de Matemática

Rio de Janeiro - RJ, Brasil
2014

Coordenação Editorial:

Flávia Morgana de O. Jacinto

Editora: SBM

Impresso na Gráfica:

Capa: ? ? ?

Patrocínio: Superintendência da Zona Franca de Manaus (SUFRAMA)

Copyright ©2014 by Autores
Direitos reservados, 2014 pela SBM.

Catálogo elaborado pela Biblioteca ???

Bibliotecária: ????

BOCKER, Carlos. Introdução aos Sistemas Dinâmicos Unidimensionais –
Rio de Janeiro, RJ : SBM, 2014, ?? p., 20.5 cm -
(Minicurso Colóquio CO 2014; v. ??)

ISBN ????-????

1. Sistemas dinâmicos 2. Família Quadrática 3. Teorema de Sharkovskii

BOCKER, Carlos. Introdução aos Sistemas Dinâmicos Unidimensionais. ???

CDD - 51

Agradecimentos

Meus agradecimentos todo especial a minha noiva Ronally Dantas que vem me apoiando em tudo que faço e que muito contribuiu para a digitação deste trabalho.

À organização do III Colóquio de Matemática da Região Norte pelo convite.

Ao CNPq e à CAPES pela apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todas as pessoas e órgãos que contribuíram para a realização deste evento.

“Algo tão pequeno como o bater das asas de uma borboleta pode causar um tufão do outro lado do mundo.” Teoria do Caos.

Conteúdo

Prefácio	13
1 Conceitos e Ideias Gerais sobre Sistemas Dinâmicos	15
1.1 Exemplos de Sistemas Dinâmicos	15
1.1.1 Dinâmica de uma população	16
1.2 Definições Elementares	18
1.3 Hiperbolicidade	21
1.4 Exercícios	26
2 A Família Quadrática	27
2.1 Caso $1 < \mu < 3$	28
2.2 O caso $\mu > 4$	30
2.3 Exercícios	34
3 Teorema de Sharkovsky	37
3.1 Teorema de Li e Yorke	37
3.2 Teorema de Sharkovsky	40
3.3 Exercícios	46

Prefácio

O principal objetivo no estudo de sistemas dinâmicos é entender o comportamento a longo prazo de estados presentes em um sistema cuja evolução é dada por uma regra determinística. Para representar a realidade, é razoável acreditar que precisamos de muitas variáveis. Entretanto, sistemas dinâmicos dependendo de apenas uma variável já apresentam comportamentos riquíssimos em termos de complexidade, podendo inclusive ser “caótico”. Neste minicurso estudaremos apenas sistemas dinâmicos unidimensionais.

Ao escrever estas notas, o objetivo principal foi dar uma visão geral sobre sistemas dinâmicos, exigindo-se o mínimo de matemática possível. Mais especificamente, o texto é voltado a alunos de graduação em Matemática e áreas afins, que já tenham feito pelo menos um curso de Cálculo, e principalmente para aqueles alunos que pretendem seguir na carreira acadêmica voltada para pesquisa em sistemas dinâmicos.

Estas notas foram baseadas nos livros de Devaney [1] e Robinson [2]. O leitor interessado pode consultá-los para um estudo mais completo dos assuntos aqui abordados.

UFPB, João Pessoa, 02/09/2014.

Carlos Bocker

Capítulo 1

Conceitos e Ideias Gerais sobre Sistemas Dinâmicos

1.1 Exemplos de Sistemas Dinâmicos

Vamos motivar a definição de sistemas dinâmicos através de exemplos. Estes exemplos mostram como sistemas dinâmicos aparecem no “mundo real” e como fenômenos muito simples da natureza implicam em sistemas dinâmicos muito complicados.

Primeiramente, o que é sistema dinâmico? A resposta é muito simples: pegue uma calculadora científica e digite qualquer número, depois aperte sucessivamente na tecla correspondente a alguma das funções existentes na calculadora. Este procedimento iterativo é um exemplo de sistema dinâmico. Por exemplo, dado qualquer valor inicial x , se a função escolhida é a exponencial (tecla “exp”), então a sequência obtida é

$$x, e^x, e^{e^x}, e^{e^{e^x}}, \dots$$

Isto é, nós estamos iterando a função exponencial. Se este experimento é realizado várias vezes, veremos que, para qualquer escolha inicial de x , a calculadora exibirá rapidamente uma mensagem de “overflow” (depende do idioma da calculadora), isto é, sucessivas iterações de $\exp(x)$ tendem a ∞ . Esta é a principal questão que nós iremos abordar na sequência: dada uma função f e um valor inicial x_0 , o que ultimamente aparece na sequência de iterados

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

Analisando o que acontece com as funções $\sin x$ e $\cos x$, veremos que a sequência de seus iterados levam, respectivamente, aos valores 0 e 0,73908... (em radianos). O leitor pode começar a suspeitar que iterações de qualquer valor inicial, por uma dada função, sempre nos leva a uma sequência que converge para algum ponto fixo limite. Porém, isso nem sempre é verdade. Muitos exemplos simples, até mesmo de funções quadráticas, levam a resultados muito complexos e inesperados, quando iterados. Por exemplo, programe em um computador ou numa calculadora para iterar a função $f(x) = 4x(1-x)$. Comece com um valor x entre 0 e 1 e veja o que acontece, dependendo do valor escolhido será possível perceber uma desordem total na sequência (caos). Depois, mude o parâmetro 4 para 3,839, isto é, considere $g(x) = 3,839x(1-x)$. Neste último caso, observa-se que os iterados de pontos escolhidos aleatoriamente no intervalo $(0, 1)$ ficam oscilando num ciclo repetido de três números 0,14988; 0,489172 e 0,959299 a partir de uma quantidade de iterados suficientemente grande.

Estes dois últimos exemplos fazem parte da família quadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ que, como veremos, apresenta uma riqueza dinâmica surpreendente.

Devemos, entretanto, observar que existem muitos outros tipos de sistemas dinâmicos além dos iterados de funções. Por exemplo, equações diferenciais são exemplos de sistemas dinâmicos contínuos, que se opõe aos sistemas dinâmicos discretos. Aqui trataremos apenas de sistemas dinâmicos discretos.

Sistemas dinâmicos acontecem em todos os ramos da ciência, das equações diferenciais da mecânica clássica às equações de diferenças da matemática econômica e da biologia. No que segue, vamos descrever um modelo simples de população biológica que servirá de motivação para nossos propósitos.

1.1.1 Dinâmica de uma população

Biólogos populacionais estão interessados no comportamento a longo prazo da população de uma certa espécie ou coleção de espécies. Dado certos parâmetros observáveis ou experimentalmente determinados (número de predadores, condições climáticas, disponibilidade de alimentos, etc), os conjuntos biológicos serão levados a um modelo matemático para descrever as flutuações da população. Este pode tomar a forma de uma equação diferencial ou uma equação de diferença, dependendo se a população é assumida a mudar continuamente ou se a população é medida a cada ano ou a cada geração.

Por exemplo, suponha ingenuamente que a taxa de crescimento de uma dada população seja proporcional a população inicial. Então se $P(t)$ é a

população no tempo t , podemos descrevê-la por

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

onde k é uma constante.

A solução desta equação é $P(t) = P_0 e^{kt}$, onde $P_0 = P(0)$ é a população inicial. Portanto, se a constante de proporcionalidade k é positiva, então $P(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ levando a uma explosão da população. Se $k < 0$ então $P(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, levando a extinção.

Este simples exemplo pode ser estudado como uma equação de diferença. Denote por P_n a população após n gerações, onde n é um número natural. Podemos imaginar que a população na próxima geração é proporcional à população presente, isto é,

$$P_{n+1} = kP_n$$

onde k é uma constante. Temos

$$\begin{aligned} P_1 &= kP_0 \\ P_2 &= kP_1 = k^2P_0 \\ P_3 &= kP_2 = k^3P_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Assim, concluímos que se $k > 1$, $P_n \rightarrow \infty$ enquanto que se $0 < k < 1$, então $P_n \rightarrow 0$. Para uso posterior, veremos esta equação de diferença como o iterado de uma função. Considere $x = P_0$ e ponha $f(x) = kx$. Note que $P_1 = f(x)$, $P_2 = f(f(x))$, $P_3 = f(f(f(x)))$, etc. Portanto, o último comportamento da população está intimamente ligado ao comportamento assintótico dos iterados de uma função f .

Um outro modelo mais realístico pode ser obtido admitindo que a população tenha um valor limite L . Se $P(t)$ excede L , a população deve tender a decrescer. Por outro lado, se $P(t) < L$ existe um lugar para mais um da espécie, assim $P(t)$ deve crescer. Um modelo biológico simplificado que traduz esse comportamento é dado por:

$$\frac{dP}{dt} = kP(L - P) \tag{1.1.1}$$

Assumindo $k > 0$, temos:

1. Se $P = L$ então $\frac{dP}{dt} = 0$;
2. Se $P < L$ então $\frac{dP}{dt} > 0$;

3. Se $P > L$ então $\frac{dP}{dt} < 0$.

Não é difícil computar a solução de (1.1.1) para obter

$$P(t) = \frac{LP_0 e^{Lkt}}{L - P_0 + P_0 e^{Lkt}}$$

Olhando o modelo como uma equação de diferenças e pondo $L = 1$, temos:

$$P_{n+1} = kP_n(1 - P_n), \quad (k > 0).$$

E, como antes, podemos escrever, $x = P_0$ e $f(x) = kx(1 - x)$. Assim, $P_1 = f(x)$, $P_2 = f(f(x))$, etc. Dessa forma, para analisar o comportamento de uma população para uma constante k , devemos determinar o comportamento assintótico da função $f(x) = kx(1 - x)$. Esta função é conhecida como função logística e sua dinâmica tem sido objeto de muitas pesquisas nos últimos anos.

1.2 Definições Elementares

Para as definições a seguir, considere uma função contínua $f : I \rightarrow I$, onde I é um subconjunto de \mathbb{R} . Assumiremos também que f é de classe C^1 ou C^2 quando tomarmos primeira ou segunda derivada da função. Para n inteiro positivo, denote por f^n a composição de n funções iguais a f , isto é,

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ funções}}$$

Denote ainda por f^0 a função identidade, ou seja, $f^0(x) = x$. Quando f for invertível com inversa f^{-1} , para n inteiro negativo, f^n denotará o $(-n)$ -ésimo iterado da inversa de f , isto é,

$$f^n = (f^{-1})^{-n} = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{-n \text{ funções}}$$

Definição 1.1. Dizemos que uma função $f : I \rightarrow J$ é um homeomorfismo se ela é uma bijeção contínua de I em J com inversa contínua. Se além disso, f e sua inversa f^{-1} são de classe C^1 (isto é, f e f^{-1} são deriváveis com derivadas contínuas) então diremos que f é um difeomorfismo.

Exemplo 1.1. A função $f(x) = x^3$ é contínua e tem inversa contínua $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, mas não é um difeomorfismo, porque sua inversa não é derivável em zero.

Definição 1.2. A órbita positiva de um ponto $x \in I$ é o conjunto de pontos

$$\mathcal{O}^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\} = \{f^n(x) : n \geq 0\}.$$

Se f é um homeomorfismo, podemos definir a órbita total de x como o conjunto

$$\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$$

e a órbita negativa de x por

$$\mathcal{O}^-(x) = \{f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots\}.$$

É comum denominar a órbita positiva simplesmente por *órbita*, principalmente quando a função em questão não é invertível.

Definição 1.3. Dizemos que x é um ponto fixo de f se $f(x) = x$. Se $f^n(x) = x$ então dizemos que x é um ponto periódico de período n . O menor inteiro positivo n tal que $f^n(x) = x$ é chamado de primeiro período de x . Denotamos por $Per_n(f)$ o conjunto dos pontos periódicos de período n de f e por $Fix(f)$ o conjunto dos pontos fixos de f , isto é,

$$Fix(f) = \{x : f(x) = x\} \quad e \quad Per_n(f) = \{x : f^n(x) = x\}.$$

O conjunto de todos os iterados de um ponto periódico formam uma órbita periódica.

Exemplo 1.2. A função $f(x) = x^3$ possui $-1, 0$ e 1 como pontos fixos e nenhum outro ponto periódico. Já a função $P(x) = x^2 - 1$ tem pontos fixos em $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ e os pontos 0 e -1 encontram-se em uma órbita de período 2.

É interesse, muitas vezes, dar uma representação gráfica do comportamento das órbitas de uma função. Para isso, tanto nós podemos olhar para o gráfico da função, como podemos fazer um esquema na reta indicando para onde as órbitas dos pontos do domínio da função estão “convergindo”. Este último é chamado de *retrato de fase* de uma função f . Isto é, O retrato de fase é uma representação geométrica de todas as trajetórias de uma sistema dinâmico, no nosso caso, na reta. Para melhor entendimento, considere os seguinte exemplo.

Exemplo 1.3. As funções $f(x) = -x$, $g(x) = 2x$, $h(x) = \frac{1}{2}x$ e $j(x) = x^3$ são tais que f tem 0 como ponto fixo e os demais pontos são periódicos de período 2; g tem um ponto fixo em 0 e os demais pontos se afastam de 0 por iterações de g ; h tem um ponto fixo em 0 que atrai todos os demais pontos;

e j tem três pontos fixos $0, -1, 1$, sendo que 0 atrai todos os pontos que estão no intervalo $(-1, 1)$, os pontos que são menores que -1 vão para $-\infty$ sob iterações de j e os que são maiores que 1 tendem a $+\infty$. O comportamento dessas funções pode ser melhor visualizado na Figura 1.1.

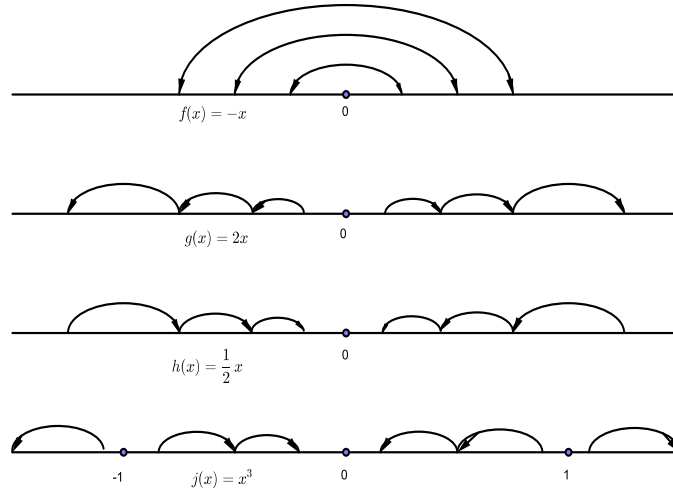


Figura 1.1: Retrato de Fase das Funções $-x, 2x, \frac{1}{2}x$ e x^3

Definição 1.4. Um ponto x é pré-periódico de período n se x não é periódico, mas existe $m > 0$ tal que $f^m(x)$ é periódico de período n .

Observe que, quando y é um ponto periódico de período n , qualquer um de seus iterados também é periódico de mesmo período n . Assim, se x é como na Definição 1.4, então $f^{n+k}(x) = f^k(x)$ para todo $k \geq m$.

Exemplo 1.4. Seja $f(x) = x^2$. Então $f(1) = 1$ é fixo, enquanto que $f(-1) = 1$ é pré-fixo, ou seja, -1 é pré-periódico de período 1.

Observe que se f é um homeomorfismo então f não possui ponto pré-periódico (por quê?).

Definição 1.5. Um ponto x é positivamente assintótico a p se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f^k(x) - f^k(p)| = 0.$$

No caso em que p é periódico de período n é equivalente dizer que x é positivamente assintótico a p se $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{jn}x = p$. O conjunto estável de p ,

denotado por $W^s(p)$, consiste de todos os pontos positivamente assintóticos a p .

Se f é invertível, dizemos que x é negativamente assintótico se

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} |f^k(x) - f^k(p)| = 0.$$

O conjunto dos pontos negativamente assintóticos a p é chamado de conjunto instável de p e é denotado por $W^u(p)$.

Exemplo 1.5. Seja $f(x) = x^3$. Então $W^s(0)$ é o intervalo aberto $(-1, 1)$. $W^u(1)$ é o eixo real positivo, enquanto que $W^u(-1)$ é o eixo real negativo.

Definição 1.6. Um ponto x é um ponto crítico de f se $f'(x) = 0$ o ponto crítico é não degenerado se $f''(x) \neq 0$. O ponto crítico é degenerado se $f''(x) = 0$.

Por exemplo, $f(x) = x^2$ tem um ponto crítico não degenerado em 0, mas $f(x) = x^n$ para $n > 2$ tem um ponto crítico degenerado em 0. Note que pontos críticos degenerados podem ser de máximo, de mínimo ou ponto de sela (como no caso da função $f(x) = x^3$). Mas pontos críticos não degenerados devem ser de máximo ou de mínimo. Pontos críticos não podem ocorrer para difeomorfismos, mas sua existência para funções não invertíveis é uma das razões para o qual estes tipos de funções são mais complicados.

O objetivo de sistemas dinâmicos é entender a natureza de todas as órbitas, e identificar o conjunto de órbitas que são periódicas, pré-periódicas, assintóticas, etc. Geralmente, isto é uma tarefa impossível. Por exemplo, se $f(x)$ é uma polinomial quadrática, então para obter explicitamente os pontos periódicos de período n necessitaríamos resolver a equação $f^n(x) = x$, que é uma equação polinomial de grau 2^n .

1.3 Hiperbolicidade

Simplex funções como $\text{id}(x) = x$ e $f(x) = -x$ são, infelizmente, atípicos em sistemas dinâmicos. Existem muitas razões pelas quais isso acontece, mas uma das propriedades mais atípicas dessas funções é que todos os seus pontos são periódicos por iteração dessas funções. A maioria das funções não tem este tipo de comportamento. Pontos periódicos tendem a ser espalhados na reta. Nesta seção vamos introduzir o conceito de hiperbolicidade. A existência de pontos periódicos e hiperbólicos é uma das propriedades que ocorrem tipicamente em muitos sistemas dinâmicos e, tal propriedade fornece um dos tipos mais simples de comportamentos periódicos para analisar.

Definição 1.7. Seja p um ponto periódico de primeiro período igual a n . O ponto p é hiperbólico se $|(f^n)'(p)| \neq 1$.

Exemplo 1.6. Considere o difeomorfismo sobre \mathbb{R} , dado por $f(x) = \frac{x^3 + x}{2}$. Existem três pontos fixos: $x = -1, 0$ e 1 . Note que $f'(0) = \frac{1}{2}$ e $f'(\pm 1) = 2$. Portanto os pontos fixos de f são hiperbólicos.

Exemplo 1.7. Se $f(x) = -\frac{x^3 + x}{2}$ então 0 é ponto fixo hiperbólico com $|f'(0)| = \frac{1}{2}$ e os pontos -1 e 1 encontram-se numa órbita periódica de período 2 . Note que, pela regra da cadeia, $(f^2)'(\pm 1) = f'(\mp 1)f'(\pm 1) = 4$ e, portanto ± 1 são hiperbólicos.

Observamos que, nos dois exemplos acima, temos $|f'(0)| < 1$ e que pontos próximos a 0 são assintoticamente estáveis a 0 (confira!). Esta situação não é específica para estes dois exemplos. De fato, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função de classe C^1 , temos a seguinte

Proposição 1.1. Suponha que p é um ponto fixo hiperbólico com $|f'(p)| < 1$. Então existe um intervalo aberto U em torno de p tal que se $x \in U$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p.$$

Em particular, $U \subset W^s(p)$.

Demonstração: Como f é de classe C^1 , existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f'(x)| < r < 1$ para $x \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$. Pelo Teorema do Valor Médio

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| \leq r|x - p| < |x - p| \leq \varepsilon.$$

Portanto, $f(x)$ pertence ao intervalo $[p - \varepsilon, p + \varepsilon]$ e, de fato, está mais próximo de p do que x . Pelo mesmo argumento

$$|f^n(x) - p| \leq r^n|x - p|.$$

Como $r^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p$. ■

Corolário 1.1. Se p é um ponto periódico hiperbólico de período n com $|(f^n)'(p)| < 1$, então existe um intervalo aberto U em torno de p tal que $f^n(U) \subset U \subset W^s(p)$.

Demonstração: Basta aplicar a Proposição 1.1 para a função $g = f^n$, observando também os argumentos da demonstração da proposição. ■

Definição 1.8. *Seja p um ponto periódico hiperbólico de período n com $|(f^n)'(p)| < 1$. O ponto p é chamado de ponto periódico atrator (ou simplesmente, um atrator) ou um poço.*

Segue da definição acima e do Corolário 1.1 que se p é um ponto periódico atrator de período n , ele possui vizinhanças que são levadas dentro delas mesmo por f^n . Qualquer dessas vizinhanças é chamada de *conjunto estável local* e denotada por $W_{loc}^s(p)$.

Podemos distinguir três tipos diferentes de pontos fixos atratores, a saber, aqueles onde $f'(p) = 0$, $0 < f'(p) < 1$ e $-1 < f'(p) < 0$.

O comportamento de uma função próximo de pontos periódicos onde a derivada é maior que 1 em valor absoluto é muito diferente do comportamento atrator.

Proposição 1.2. *Seja p um ponto fixo com $|f'(p)| > 1$. Então existe um intervalo aberto U contendo p tal que, se $x \in U$ e $x \neq p$, então existe $k > 0$ tal que $f^k(x) \notin U$.*

Demonstração: Como f é de classe C^1 , existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f'(x)| > R > 1$ para $x \in U = [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$. Afirmamos que para todo $x \in U$, $x \neq p$ existe $k > 0$ tal que $f^k(x) \notin U$. De fato, se existisse $x \neq p$ pertencente a U tal que $f^k(x) \in U$ para todo $k > 0$ teríamos, pela Regra da Cadeia e Teorema do Valor Médio,

$$|f^k(x) - p| = |f^k(x) - f^k(p)| > R^k|x - p|. \quad (1.3.2)$$

Como o lado direito de (1.3.2) tende a ∞ quando $n \rightarrow \infty$, temos que $|f^k(x) - p|$ tende a ∞ , o que contradiz a hipótese de que $f^k(x) \in U$ para todo $k > 0$. E, portanto, a proposição está demonstrada. ■

Definição 1.9. *Um ponto fixo p com $|f'(p)| > 1$ é chamado um ponto fixo repulsor (ou simplesmente, repulsor) ou fonte. A vizinhança descrita na Proposição 1.2 é chamada de conjunto instável local e é denotada por $W_{loc}^u(p)$.*

Portanto, o comportamento de pontos próximos a pontos periódicos hiperbólicos é regido pela derivada em cada ponto periódico. No entanto, isso não é verdade para pontos periódicos não hiperbólicos, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 1.8. *Ambas as funções $f(x) = x + x^3$, $g(x) = x - x^3$ e $h(x) = x + x^2$ têm 0 como ponto fixo não hiperbólico, a saber, $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ com $f'(0) = g'(0) = h'(0) = 1$. No entanto, o comportamento dessas*

funções são bem distintos numa vizinhança de 0. O ponto 0 é um repulsor fraco para f , um atrator fraco para g e, para h , 0 atrai fracamente uma vizinhança à sua esquerda e repele uma vizinhança à sua direita. Veja os gráficos dessas funções na Figura 1.2

A maioria das funções têm pontos periódicos hiperbólicos, no entanto pontos hiperbólicos não hiperbólicos aparecem frequentemente em famílias de funções. Quando isso acontece, a estrutura do ponto periódico sofre o que chamamos de *bifurcação*. Os próximos exemplos nos dão uma ideia desse tipo de comportamento.

Exemplo 1.9. Considere a família $Q_c(x) = x^2 + c$, onde $c \in \mathbb{R}$ é um parâmetro. Os gráfico de Q_c assumem três diferentes posições relativas a diagonal que depende do valor de c . Se $c < \frac{1}{4}$ então o gráfico de Q_c corta a diagonal em dois pontos fixos hiperbólicos, se $c = \frac{1}{4}$ então a interseção ocorre num único ponto fixo não hiperbólico e, finalmente, se $c > \frac{1}{4}$, o gráfico de Q_c não intersecta a diagonal e, conseqüentemente, Q_c não tem ponto fixo.

Logo, o retrato de fases de Q_c muda quando c varia próximo de $\frac{1}{4}$. Esta mudança é um exemplo de bifurcação .

Exemplo 1.10. Considere a família quadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, $\mu > 1$. Note que F_μ tem dois pontos fixos 0 e $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ tais que $F'_\mu(0) = \mu$ e $F'_\mu(p_\mu) = 2 - \mu$. Portanto, 0 é repulsor para $\mu > 1$ e p_μ é atrator para $1 < \mu < 3$. Quando $\mu = 3$, $F'_\mu(p_\mu) = -1$.

Se esboçarmos o gráfico de F_μ^2 para μ próximo de 3, veremos que dois novos pontos fixos aparecem quando μ cresce a partir de 3, isto é, há dois novos pontos periódicos de período 2 para F_μ . Dessa forma uma nova bifurcação ocorre em $\mu = 3$, pois houve uma mudança em $\text{Per}_2(F_\mu)$.

Esta família quadrática, de fato, exhibe muitos dos fenômenos que são cruciais na teoria geral. Tal família é o tema de nosso próximo capítulo.

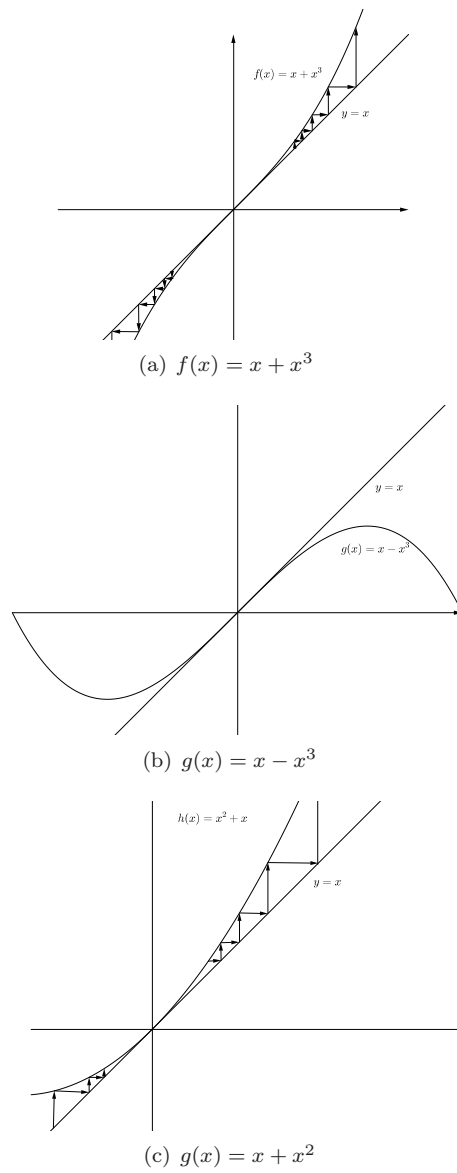


Figura 1.2: Comportamentos de pontos fixos não hiperbólicos

1.4 Exercícios

- Use uma calculadora para iterar cada uma das seguintes funções (usando um valor inicial arbitrário) e explique estes resultados.
 - $C(x) = \cos(x)$
 - $S(x) = \operatorname{sen}(x)$
 - $E(x) = e^x$
 - $F(x) = \frac{1}{e}e^x$
 - $A(x) = \arctan(x)$
- Usando o gráfico das funções, identifique os pontos fixos de cada uma das funções do exercício anterior.
- Um homeomorfismo f de \mathbb{R} é (estritamente) monótono crescente se $f(x) < f(y)$ sempre que $x < y$. Ele é (estritamente) monótono decrescente se $x < y$ implica que $f(x) > f(y)$. Prove que qualquer homeomorfismo f de \mathbb{R} (contínuo, bijetor com inversa contínua) é monótono crescente ou monótono decrescente. Prove que um homeomorfismo f de \mathbb{R} nunca pode ter pontos periódicos cujo menor período é maior que 2.
- Prove que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 e existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f'(x)| \geq \varepsilon$ então f é um difeomorfismo. A recíproca é verdadeira?
- Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Suponha que para um ponto x_0 , a órbita $f^j(x_0)$ é uma sequência monótona e limitada. Prove que $f^j(x_0)$ converge para um ponto fixo.
- Seja

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{para } x \leq 1/2; \\ 2 - 2x, & \text{para } x \geq 1/2. \end{cases}$$

- Esboce o gráfico sobre $I = [0, 1]$ de T , T^2 e (um gráfico representativo de) T^n para $n > 2$.
- Use o gráfico de T^n para concluir que T tem exatamente 2^n pontos de período n . (Estes pontos não necessariamente tem menor período n , mas são pontos fixos de T^n).
- Prove que o conjunto de todos os pontos periódicos de T é denso em $[0, 1]$.

Capítulo 2

A Família Quadrática

Neste capítulo vamos considerar a família de funções quadráticas $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ para $\mu > 1$. Como discutido no Exemplo 1.10, os pontos fixos desta família são 0 e $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$. Para determinar sua estabilidade, note que $F'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$ e, portanto, $|F'_\mu(0)| = |\mu| > 1$, assim 0 é repulsor. Por outro lado $|F'_\mu(p_\mu)| = |\mu - 2\mu + 1| = |2 - \mu|$ e, assim, temos que:

$$\begin{cases} p_\mu \text{ é atrator,} & \text{se } 1 < \mu < 3; \\ p_\mu \text{ é repulsor,} & \text{se } \mu > 3. \end{cases}$$

A seguinte proposição indica quais pontos vão para infinito e assim quais outros pontos tem chances de ser periódico. Veja também o gráfico de F_μ na Figura 2.1.

Proposição 2.1. *Seja $\mu > 1$. Se $x \notin [0, 1]$ então $F_\mu^k(x) \rightarrow -\infty$, quando $k \rightarrow +\infty$*

Demonstração: Para $x < 0$, $F'_\mu = \mu - 2\mu x > 1$. Portanto, se $x_0 < 0$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $x_0 < \bar{x} < 0$, tal que $F_\mu(x_0) = F_\mu(x_0) - F_\mu(0) = F_\mu(\bar{x})x_0 < x_0$. Por monotonicidade de F_μ para $x < 0$, temos:

$$x_0 > F_\mu(x_0) > F_\mu^2(x_0) > \dots > F_\mu^k(x_0) > \dots$$

Se esta órbita fosse limitada, ela deveria convergir para algum ponto fixo negativo. Como não há tal ponto, $F_\mu^k(x_0) \rightarrow -\infty$.

Se $x_0 > 1$, então $F_\mu(x_0) < 0$ e, assim, $F_\mu^k(x_0) = F_\mu^{k-1}(F_\mu(x_0)) \rightarrow -\infty$ ■

Nas próximas seções trataremos, separadamente, os casos $1 < \mu < 3$ e $\mu > 4$.

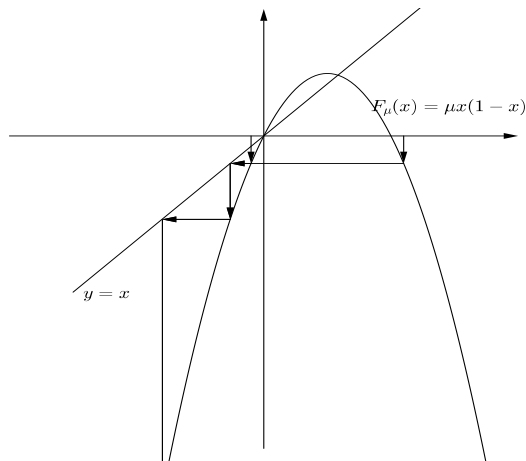


Figura 2.1: Os iterados dos x fora de $[0, 1]$ tendem a $-\infty$.

2.1 Caso $1 < \mu < 3$.

A menos de menção explícita contrária, nesta seção, vamos supor que μ é um parâmetro entre 1 e 3.

Proposição 2.2. *Se $x \in (0, 1)$, então $F_\mu^k(x)$ converge para p_μ quando $k \rightarrow +\infty$. Portanto, $W^s(p_\mu) = (0, 1)$.*

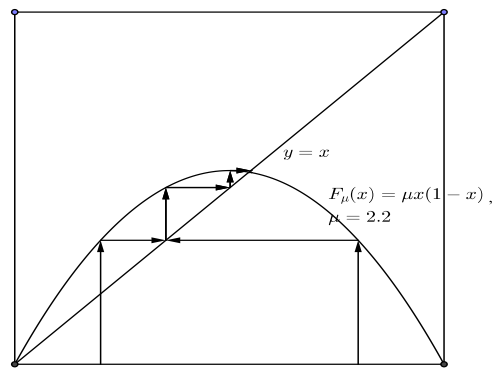


Figura 2.2: Os iterados dos $x \in (0, 1)$ tendem a p_μ .

Demonstração: Dividiremos a demonstração em dois casos:

- (a) Considere primeiramente $1 < \mu \leq 2$. O máximo de F_μ ocorre em $x = \frac{1}{2}$. Para estes parâmetros $F_\mu(\frac{1}{2}) = \frac{\mu}{4} \leq \frac{1}{2}$, e, portanto, $p_\mu = F_\mu(p_\mu) \leq \frac{1}{2}$.

A função é, portanto, monótona crescente sobre $(0, p_\mu)$ e o gráfico de F_μ está acima da diagonal ($y = x$). Logo, para $x_0 \in (0, p_\mu)$, a sequência $F_\mu^k(x_0)$ é monótona crescente e limitada por p_μ , e, conseqüentemente converge para o ponto fixo p_μ .

Similarmente, sobre o intervalo $(p_\mu, \frac{1}{2}]$ a função é monótona crescente e o gráfico de F_μ está abaixo da diagonal.

Dessa forma, para $(x_0) \in (p_\mu, \frac{1}{2}]$, a sequência $F_\mu^k(x_0)$ decresce de maneira monótona para p_μ . Finalmente, para $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, $F_\mu(x_0) \in (0, \frac{1}{2})$ e, assim $F_\mu^k(x_0)$ converge para p_μ . Isto completa a prova para $1 < \mu \leq 2$.

- (b) Agora suponha que $2 < \mu < 3$ e, portanto, $p_\mu > \frac{1}{2}$.

Seja $\hat{p}_\mu = 1 - p_\mu < \frac{1}{2}$, assim $F_\mu(\hat{p}_\mu) = p_\mu$.

i. Considere o intervalo $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$. Aplicando F_μ , temos:

$$F_\mu([\hat{p}_\mu, p_\mu]) = F_\mu([\frac{1}{2}, p_\mu]) = [p_\mu, \frac{\mu}{4}].$$

Então,

$$F_\mu^2([\hat{p}_\mu, p_\mu]) = [\mu(\frac{\mu}{4})(1 - \frac{\mu}{4}), p_\mu] \quad (2.1.1)$$

Queremos mostrar que

$$F_\mu^2([\hat{p}_\mu, p_\mu]) \subset [\frac{1}{2}, p_\mu] \subset [\hat{p}_\mu, p_\mu].$$

Por (2.1.1), é suficiente mostrar que

$$\mu(\frac{\mu}{4})(1 - \frac{\mu}{4}) > \frac{1}{2}$$

ou equivalentemente,

$$0 > \mu^3 - 4\mu^2 + 8 = (\mu - 2)(\mu^2 - 2\mu - 4)$$

As raízes de $\mu^2 - 2\mu - 4$ são $1 \pm \sqrt{5}$ e, assim, este fator é negativo para $\mu < 3$. O primeiro fator $\mu - 2$ é positivo, assim o produto é negativo, como queríamos mostrar.

Portanto, concluímos que

$$F_\mu^2([\hat{p}_\mu, p_\mu]) \subset [\frac{1}{2}, p_\mu] \subset [\hat{p}_\mu, p_\mu].$$

Além disso, $F_\mu^2(\frac{1}{2}) = \mu(\frac{\mu}{4})(1 - \frac{\mu}{4}) > \frac{1}{2}$. Portanto, sobre o intervalo $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$, o gráfico de F_μ^2 cruza a diagonal uma vez e é exatamente em p_μ , pois F_μ^2 não possui outros pontos fixos além de 0 e p_μ . (Veja Exercício 1 deste capítulo).

Como o gráfico de F_μ^2 está acima da diagonal no intervalo $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$, todos os pontos neste intervalo converge para p_μ .

- ii. Se $x_0 \in (0, \hat{p}_\mu)$ então, pela monotonicidade de F_μ e pelo fato de que o gráfico de F_μ está acima da diagonal nesse intervalo, temos que $F_\mu^k(x_0)$ é monótona crescente enquanto $F_\mu^k(x_0)$ pertencer a $(0, \hat{p}_\mu)$. Como $F_\mu(\hat{p}_\mu) = p_\mu$, o primeiro iterado de $F_\mu^k(x_0)$ que deixa $(0, \hat{p}_\mu)$ deve pertencer a $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$, isto é, $F_\mu^j(x_0) \in [\hat{p}_\mu, p_\mu]$ para algum $j > 0$. Então $F_\mu^{j+k}(x_0)$ converge para p_μ .
- iii. Finalmente, se $x_0 \in (p_\mu, 1)$, então $F_\mu(x_0) \in (0, p_\mu)$ e, assim, $F_\mu^k(x_0)$ converge para p_μ .

Combinando os três casos, provamos a proposição. ■

Portanto, para $1 < \mu < 3$, F_μ tem somente dois pontos fixos e todos os outros pontos em $[0, 1]$ são assintóticos a p_μ . Logo, a dinâmica de F_μ está completamente entendida para μ neste intervalo.

Como vimos no Exemplo 1.10, quando o parâmetro passa por $\mu_0 = 3$, a dinâmica fica ligeiramente mais complicada: surge um novo ponto periódico de período 2. Este é o início de uma longa história, pois quando μ continua crescendo, a dinâmica de F_μ torna-se cada vez mais complicada. No caso em que $3 < \mu < 4$, a dinâmica de F_μ apresenta comportamentos extremamente complexos, por isso não o trataremos aqui.

Na próxima seção, vamos tratar o caso em que $\mu > 4$.

2.2 O caso $\mu > 4$.

Note que como $\mu > 4$, o valor máximo de F_μ , $\frac{\mu}{4}$, é maior 1, e, portanto, existem pontos que deixam o intervalo $I := [0, 1]$ no primeiro iterado, veja

o gráfico de F_μ na Figura 2.3. Denote o conjunto de tais pontos por A_0 . Claramente, A_0 é um intervalo aberto centrado em $\frac{1}{2}$ e é caracterizado por

$$A_0 = \{x \in I \mid F_\mu(x) > 1\}$$

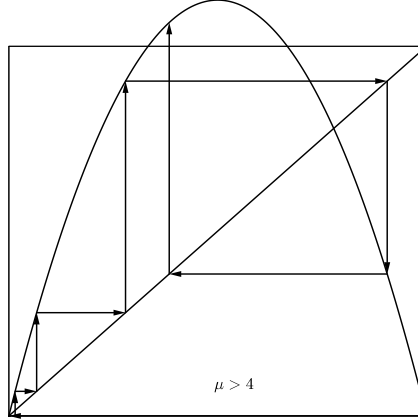


Figura 2.3: Há pontos em $(0, 1)$ que escapam de $[0, 1]$ por iteração de F_μ .

Assim, se $x \in A_0$, então $F_\mu^2(x) < 0$ e portanto $F_\mu^k(x) \rightarrow -\infty$, quando $k \rightarrow \infty$.

Defina

$$A_1 = \{x \in I \mid F_\mu(x) \in A_0\}$$

Se $x \in A_1$, então $F_\mu^2(x) > 1$ e portanto $F_\mu^k(x) \rightarrow \infty$, quando $k \rightarrow \infty$.

Indutivamente defina

$$A_n = \{x \in I \mid F_\mu^n(x) \in A_0\},$$

isto é,

$$A_n = \{x \in I \mid F_\mu^i(x) \in I, \quad i \leq n, \text{ mas } F_\mu^n(x) \notin I\}.$$

Como acima, concluímos que se $x \in A_n$ então $F^k(x) \rightarrow -\infty$, quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, resta-nos analisar os pontos que nunca escapam de I por iteração de F_μ , isto é, vamos analisar o conjunto de pontos que se encontram em

$$\Lambda := I \setminus (\cup_{n=0}^{\infty} A_n).$$

Nossa primeira questão é: O que é exatamente este conjunto de pontos? Para entender Λ , vamos descrever mais cuidadosamente sua construção recursiva.

Como A_0 é um intervalo aberto centrado em $\frac{1}{2}$, $I \setminus A_0$ consiste de dois intervalos fechados, I_0 do lado esquerdo e I_1 do lado direito de A_0 .

Observe que F_μ aplica de forma monótona ambos os intervalos I_0 e I_1 sobre I ; de fato, F_μ é crescente em I_0 e decrescente em I_1 com $F_\mu(I_0) = F_\mu(I_1) = I$. Assim, existe um par de intervalos abertos, um deles em I_0 e o outro em I_1 que são levados em A_0 por F_μ . Portanto este par de intervalos é precisamente A_1 .

Agora considere $I \setminus (A_0 \cup A_1)$. Este conjunto consiste de quatro intervalos e F_μ leva cada um deles, de maneira monótona, em I_0 ou I_1 . Consequentemente, F_μ^2 leva cada um desses intervalos em I . E, portanto, nós concluímos que cada um desses quatro intervalos em $I \setminus (A_0 \cup A_1)$ contém um subintervalo aberto que é levado por F_μ^2 em A_0 . Consequentemente, pontos desses intervalos escapam de I no terceiro iterado de F_μ . Logo, este conjunto é A_2 . Para uso posterior, nós observamos que F_μ^2 é alternadamente crescente e decrescente nesses quatro intervalos. Segue que o gráfico de F_μ^2 tem, portanto, duas corcovas.

Continuando dessa maneira, notamos que A_n consiste de 2^n intervalos abertos disjuntos e, portanto $I \setminus (A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$ consiste de 2^n intervalos fechados, uma vez que cada intervalo de A_n corresponde a retirada de um subintervalo de cada um dos intervalos que permanecem em $I \setminus (A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$.

Além disso, F_μ^n aplica, de maneira monótona, cada um desses intervalos sobre I . De fato, F_μ^n é alternadamente crescente e decrescente sobre cada um desses intervalos. Portanto, o gráfico de F_μ^n tem exatamente 2^{n-1} corcovas sobre I , e consequentemente, o gráfico de F_μ^n cruza a diagonal $y = x$ pelo menos 2^n vezes. Isto implica que F_μ^n tem pelo menos 2^n pontos fixos ou, equivalentemente, $Per_n(F_\mu^n)$ consiste de pelo menos 2^n pontos em I . Claramente, a estrutura de Λ é muito mais complicada quando $\mu > 4$ do que o caso em que $1 < \mu < 3$.

A construção do conjunto Λ lembra a construção do conjunto “Terço-Médio” de Cantor : Λ é obtido por sucessivas remoções de intervalos abertos do “meio” de cada um dos intervalos fechados restantes do passo anterior.

Definição 2.1. *Um conjunto Λ é um conjunto de Cantor se ele é **fechado**, **totalmente desconexo** e um subconjunto **perfeito** de I . Um conjunto é **totalmente desconexo** se ele não contém intervalos; um conjunto é **perfeito** se qualquer de seus pontos é um ponto de acumulação ou ponto limite de outros pontos no conjunto.*

Exemplo 2.1 (conjunto Terço-Médio de Cantor). *Este é um exemplo clássico de um conjunto de Cantor. Comece com $I = [0, 1]$, mas remova o “terço médio” aberto, isto é, remova o intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Em seguida remova dos*

dois intervalos que permaneceram os dois terços médios novamente, isto é, remova os intervalos, $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ e $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Continue removendo os terços médios dessa forma; note que 2^n intervalos são removidos no n -ésimo estágio da construção. Portanto, este procedimento é inteiramente análogo à construção acima. Deixamos como exercício a verificação de que o conjunto Terço-Médio de Cantor é, de fato, um conjunto de Cantor de acordo com a definição 2.1.

Teorema 2.1. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então Λ é um conjunto de Cantor.*

Demonstração: A hipótese $\mu > 2 + \sqrt{5}$ garante que $|F'_\mu(x)| > 1$ para todo $x \in I_0 \cup I_1 \supset \Lambda$ (veja Exercício 3 deste capítulo). Portanto, existe $0 < \lambda < 1$ tal que, para todo $x \in \Lambda$, $|F'_\mu(x)| > \lambda$. Pela Regra da Cadeia, $|(F_\mu^n)'(x)| > \lambda^n$ para todo $x \in \Lambda$.

Afirmamos que Λ não contém intervalos. De fato, se existem $x \neq y$ tais que $[x, y] \subset \Lambda$, então, pelo Teorema do Valor Médio, $|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| > \lambda^n|x - y|$. Como o lado direito da última equação tende a infinito, quando $n \rightarrow \infty$, segue em $|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| > 1$, para algum iterado n suficientemente grande. Isso contradiz a hipótese de que ambos os pontos x e y estão em Λ . Logo, Λ não contém intervalos, isto é, Λ é totalmente desconexo.

Como Λ é uma interseção de conjuntos fechados, Λ é fechado. Agora, vamos provar que Λ é perfeito. Primeiramente, note que qualquer ponto extremo de A_k está em Λ , pois tais pontos são pré-fixos. De fato, se y é um ponto extremo de A_k então $F_\mu^{k+1}(y) = 1$, e portanto $F_\mu^{k+2}(y) = 0$, o que implica que $F_\mu^n(y) \in I$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note ainda que todo ponto extremo A_k é acumulado por pontos extremos de outros A_n , com $n > k$.

Agora, se p é um ponto isolado de Λ , então qualquer ponto próximo de p deve deixar I sob iterações de F_μ . Tais pontos devem pertencer a algum A_k . Assim, ou existe uma sequência de extremidades dos A_k convergindo para p ou então todos os pontos de uma vizinhança de p deixam I no mesmo iterado.

No primeiro caso, p não seria isolado, pois estaria sendo acumulado por extremidades dos A_k . No segundo caso, existiria um iterado n e uma vizinhança de p que seria levada no eixo real negativo, exceto p que seria levado em 0 por F_μ^n . Assim, p seria ponto de máximo para F_μ^n . Em particular, $(F_\mu^n)'(p) = 0$. Pela Regra da Cadeia, $F'_\mu(F_\mu^i(p)) = 0$ para algum $i < n$. Portanto, $F_\mu^i(p) = \frac{1}{2}$. Mas, $F_\mu^{i+1}(p) \notin I$ e assim, $F_\mu^n(p) \rightarrow -\infty$, contradizendo o fato de que $F_\mu^n(p) = 0$.

Com isso concluímos a prova de que Λ é perfeito e a prova do teorema. ■

Observação 2.1. *O Teorema acima é verdadeiro para $\mu > 4$, porém a prova é mais delicada.*

Temos, de forma satisfatória, entendido o comportamento das órbitas de F_μ , para $\mu > 4$. Ou um ponto tende a $-\infty$ sob iterações de F_μ , ou toda sua órbita encontra-se em Λ .

Assim, nós entendemos a órbita de um ponto por F_μ perfeitamente bem desde que este ponto não pertença a Λ , mas ainda não entendemos muito bem o que acontece com os pontos de Λ . Um estudo mais refinado pode ser feito para entender a dinâmica de F_μ restrita a Λ .

Quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$, temos mostrado que $|F'_\mu(x)| > 1$ para $x \in I_0 \cup I_1$. Isto implica que $|F'_\mu(x)| > 1$ para $x \in \Lambda$. Isto é similar a condição de hiperbolicidade, exceto que pedimos que $|F'_\mu(x)| \neq 1$ sobre todo o conjunto, não exatamente em um ponto periódico. Isso motiva a definição de um conjunto hiperbólico:

Definição 2.2. Um conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}$ é um conjunto hiperbólico repulsor (respectivamente atrator) para f se Γ é fechado, limitado e invariante por f e existe um $N > 0$ tal que $|(f^n)'(x)| > 1$ (respectivamente < 1) para todo $n \geq N$ e todo $x \in \Gamma$.

O conjunto de Cantor Λ para família quadrática quando $\mu > 2\sqrt{5}$ é, de fato, um conjunto hiperbólico repulsor com $N = 1$.

2.3 Exercícios

1. Seja $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, para $1 < \mu < 3$. Mostre que F_μ^2 tem apenas os pontos 0 e $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ como pontos fixos.
2. Esboce o gráfico de $F_4^n(x)$ sobre o intervalo unitário, onde $F_4(x) = 4x(1 - x)$. Conclua que F_4 tem pelo menos 2^n pontos periódicos de período n .
3. Seja $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Mostre que se $F_\mu(x) = \mu x(1 - x) \leq 1$, então $F'_\mu(x) > 1$.
4. Prove que o conjunto Terço-Médio de Cantor descrito no Exemplo 2.1 é fechado, não vazio, perfeito e totalmente desconexo.
5. Construa um conjunto Quinto-Médio de Cantor, no qual a quinta parte do meio de cada subintervalo remanescente do intervalo $[0, 1]$ é retirada. O que podemos dizer sobre a soma dos comprimentos dos intervalos remanescentes neste caso?
6. Seja Γ o conjunto Terço-Médio de Cantor. Prove que a aplicação linear $L(x) = 3x$ aplica $\Gamma \cap [0, \frac{1}{3}]$ homeomorficamente sobre Γ .

7. Generalize o Exercício 6 para mostrar que a porção de Γ contida em um intervalo remanescente na n -ésima etapa da construção de Γ é homeomorfa a Γ .

Capítulo 3

Teorema de Sharkovsky

Neste capítulo, sempre que dissermos que um ponto p é ponto periódico de período n , ficará subentendido que n é o menor período do ponto p . Vamos estudar a seguinte questão: se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e tem um ponto periódico de período n , será que f deve ter um ponto de período k ? Que períodos k são forçados por outros períodos n ?

O Teorema de Sharkovsky dá uma resposta bem completa às perguntas acima. Na próxima seção vamos demonstrar um caso particular do Teorema de Sharkovsky que foi demonstrado de forma independente por Li e Yorke onze anos depois do resultado de Sharkovsky.

3.1 Teorema de Li e Yorke

O seguinte teorema tem um enunciado muito simples e sua prova também é relativamente simples.

Teorema 3.1 (Li e Yorke (1975)). *Suponha que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e existe um ponto a tal que*

$$(i) f^3(a) \leq a < f(a) < f^2(a) \quad (ii) f^3(a) \geq a > f(a) > f^2(a).$$

Então f tem pontos periódicos de todos os períodos.

Observação 3.1. *Note que o teorema acima implica que se f tem um ponto periódico de ponto 3, então f tem pontos periódicos de todos os períodos.*

Observação 3.2. *Como já salientamos, existe um resultado mais geral devido a Sharkovsky (1964), que foi provado antes do resultado de Li e*

Yorke. Vamos provar primeiramente o Teorema 3.1, porque a prova é mais simples e os lemas usados em sua prova são necessários para o resultado mais geral.

Vamos assumir a primeira ordenação no teorema, isto é, $f^3(a) \leq a < f(a) < f^2(a)$. (A prova para outra ordenação é análoga) Seja $I_1 = [a, f(a)]$ e $I_2 = [f(a), f^2(a)]$. Então $f(I_1) \supset I_2$ e $f(I_2) \supset I_1 \cup I_2$ que pode ser visto pela imagem dos pontos extremos dos intervalos.

Lema 3.1. *Se I e J são intervalos fechados e $f(I) \supset J$, então existe um subintervalo $K \subset I$ tal que $f(K) = J$, $f(\text{int}K) = \text{int}J$ e $f(\partial K) = \partial J$.*

Demonstração: Seja $J = [b_1, b_2]$. Existe $a_1, a_2 \in I$ tais que $f(a_j) = b_j$. Suponha que $a_1 < a_2$. (o outro caso é similar). Seja

$$x_1 = \sup\{x : a_1 \leq x \leq a_2 \text{ tal que } f(x) = b_1\}$$

Por continuidade $f(x_1) = b_1$. Note que $x_1 < a_2$. Agora considere

$$x_2 = \inf\{x : x_1 \leq x \leq a_2 \text{ tal que } f(x) = b_2\}$$

Então $f(x_2) = b_2$. Portanto $f(\{x_1, x_2\}) = \{b_1, b_2\}$. Pela definição de x_1 e x_2 , $f(\text{int}[x_1, x_2]) \cap \partial J = \emptyset$. Logo, $f(\text{int}[x_1, x_2]) = \text{int}J = (b_1, b_2)$. Isto prova o lema. ■

Definição 3.1. *Um intervalo I f -cobre um intervalo J se $f(I) \supset J$. Escrevemos $I \rightarrow J$.*

Um laço de tamanho n é um ciclo $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_n = I_1$.

Lema 3.2. (a) *Suponha que existam dois pontos $a \neq b$ com $f(a) > a$ e $f(b) < b$ e que o intervalo de extremidades a e b esteja contido no domínio de f . Então existe um ponto entre a e b fixo por f .*

(b) *Se I é um intervalo fechado tal que $I \rightarrow I$, então f tem um ponto fixo em I .*

Demonstração: Basta aplicar o Teorema do Valor Intermediário para função $g(x) = f(x) - x$. Deixamos os detalhes da prova para o leitor. ■

Lema 3.3. *Suponha que $J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow \dots \rightarrow J_n = J_0$ é um laço com $f(J_k) \supset J_{k+1}$ para $k = 0, 1, \dots, n-1$.*

(a) *Então existe um ponto fixo x_0 de f^n com $f^k(x_0) \in J_k$ para $k = 0, \dots, n$.*

- (b) Se este laço não é um produto formado por p vezes em torno de um laço mais curto de comprimento m onde $mp = n$, e se $\text{int}(J_i) \cap \text{int}(J_k) = \emptyset$, exceto se $J_i = J_k$ então se o ponto fixo da parte (a) está no interior de J_0 então ele é ponto periódico de período n para f .

Demonstração:

- (a) A prova é dada por indução sobre n . Considere a propriedade (S_j) Existe um subintervalo $K_j \subset J_0$ tal que para $i = 1, \dots, j$, $f^i(K_j) \subset J_i$, $f^i(\text{int } K_j) \subset \text{int } J_i$ e $f^j(K_j) = J_j$.

Pela Lema 3.1 (S_1) é verdadeira.

Assuma que (S_{k-1}) é verdadeira. Assim existe um subintervalo $K_{k-1} \subset J_0$ satisfazendo (S_{k-1}) e, então,

$$f^k(K_{k-1}) = f(f^{k-1}(K_{k-1})) = f(J_{k-1}) \supset J^k.$$

Pelo Lema 3.1 existe um subintervalo $K_k \subset K_{k-1}$ tal que $f^k(K_k) = J_k$ com $f^k(\text{int } K_k) = \text{int } J_k$. Pela hipótese de indução (S_{k-1}) , as outras afirmações sobre (S_k) também são verdadeiras.

Agora usando a afirmação (S_n) temos $f^n(K_n) = J_0$. Pelo Lema 3.1, f^n tem um ponto fixo x_0 em $K_n \subset J_0$. Como $x_0 \in K_n$, $f^i(x_0) \in J_i$ para $i = 0, \dots, n$. Isso prova a parte (a).

- (b) Como $f^n(\text{int } K_n) = \text{int } J_0$, se $x_0 \in \text{int } J_i$ então $x_0 \in \text{int } K_n$ e $f^i(x_0) \in \text{int } J_i$ para $i = 1, \dots, n$. Como o laço não é um produto, x_0 é um ponto periódico de período n para f .

■

Demonstração do Teorema 3.1

Vamos supor o primeiro caso onde $f(a) = b > a$, $f^2(a) = f(b) = c > f(a) = b$, e $f^3(a) = f(c) \leq a$. Denote $I_1 = [a, b]$ e $I_2 = [b, c]$. Então $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_2 \rightarrow I_1 \cup I_2$.

Primeiramente $f(I_2) \supset I_2$ e assim existe um ponto fixo, pelo Lema 3.1. Agora vamos mostrar que f tem um ponto periódico de período n para qualquer $n \geq 2$. tome o laço de comprimento n iniciando por I_1 seguindo de $n - 1$ cópias de I_2 :

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_2 \rightarrow I_1.$$

Pelo Lema 3.3, existe $x_0 \in I_1$ Tal que $f^n(x_0) = x_0$ e $f^j(x_0) \in I_2$ para $j = 1, \dots, n - 1$.

Se existisse k com $1 \leq k < n$ tal que $f^k(x_0) = x_0$, então deveríamos ter $x_0 = f^k(x_0) \in I_2$. Portanto, teríamos $x_0 \in I_1 \cap I_2 = \{b\}$. Agora, mostremos que $x_0 = b$ é impossível. Para $n = 2$, $f^2(b) = f^2(x_0) = x_0 = b$, o que contradiz $f^2(b) = f^3(a) \leq a$. No caso $n \geq 3$, devemos ter $f^2(b) = f^2(x_0) \in I_2$, o que contradiz novamente $f^2(b) \leq a$.

Esta contradição mostra que $f^j(x_0) \neq x_0$ para $1 \leq j < n$, e x_0 tem período n . ■

3.2 Teorema de Sharkovsky

Definição 3.2. Definimos a ordenação de Sharkovsky dos números inteiros positivos, usando o símbolo \triangleright , como segue

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2.3 \triangleright 2.5 \triangleright 2.7 \triangleright \dots \triangleright 2^2.3 \triangleright 2^2.5 \triangleright 2^2.7 \triangleright \dots \triangleright \\ \triangleright 2^n.3 \triangleright 2^n.5 \triangleright 2^n.7 \triangleright \dots \triangleright \dots \triangleright 2^n \triangleright \dots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Mais especificamente, considere a seguinte partição dos números inteiros positivos

$$P = \{2^n : n = 0, 1, 2, \dots\} \quad \text{e, para } k = 0, 1, 2, \dots, \quad L_k = \{2^k q : q \text{ é ímpar} \geq 3\}$$

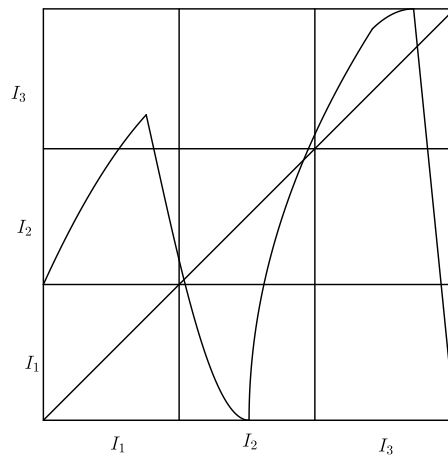
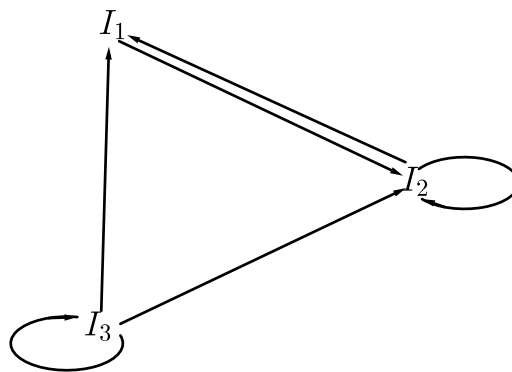
e defina a relação de ordem, $n_1 \triangleright n_2$ se:

- (i). $n_1, n_2 \in L_k$, para algum k , e $n_1 < n_2$;
- (ii). $n_1 \in L_{k_1}$ e $n_2 \in L_{k_2}$ com $k_1 < k_2$;
- (iii). n_1 pertence a algum L_k e n_2 pertence a P ;
- (iv). $n_1, n_2 \in P$ com $n_1 > n_2$.

Teorema 3.2 (Sharkovsky). *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua de uma intervalo I na reta real. Suponha que f tem um ponto periódico de período n com $n \triangleright k$. Então f tem um ponto periódico de período k . (Por período nós entendemos o menor período.)*

A prova do teorema envolve a obtenção de intervalos que f -cobrem outros de certa formas. Assim, para expressar essas ideias nós introduzimos a seguinte definição de um tipo de gráfico.

Definição 3.3. *Seja $\mathcal{A} = \{I_1, I_2, \dots, I_s\}$ uma partição de I em intervalos fechados com interiores não vazios disjuntos. Um \mathcal{A} -gráfico de f é um grafo com vértices dados pelos I_j e pelas arestas I_j para I_k tais que I_j f -cobre I_k . Também chamamos de gráfico de uma partição.*

(a) Gráfico de f no Exemplo 3.1

(b) Gráfico da Partição no Exemplo 3.1

Figura 3.1:

Exemplo 3.1. Se f tem um gráfico como na Figura ?? então I_1 f -cobre I_2 , I_2 f -cobre I_1 e I_2 e I_3 f -cobre I_1 , I_2 e I_3 . Portanto o gráfico de f para

essa partição é dado na Figura ??.

Lema 3.4. *Seja n um inteiro ímpar com $n > 1$. Suponha que f tem um ponto periódico x de período n e f não tem pontos de período ímpar k com $1 < k < n$ (isto é, $k \nmid n$). Seja $J = [\min \mathcal{O}(x), \max \mathcal{O}(x)]$ e seja \mathcal{A} a partição de J pelos elementos de $\mathcal{O}(x)$. Então o \mathcal{A} -gráfico de f contém um subgráfico da seguinte forma:*

Os I_1, I_2, \dots, I_{n-1} podem ser enumerados com todos os intervalos tendo interiores disjuntos tais que:

1. I_1 f -cobre I_1 e I_2 ;
2. I_j f -cobre I_{j+1} para $2 \leq j \leq n-2$
3. I_{n-1} f -cobre I_j para todo I_j ímpar.

Veja a Figura 3.2.

Observação 3.3. *A existência de um subgráfico como indicado no Lema-3.4 é equivalente a obtenção de um ponto $x_1 \in \mathcal{O}(x)$ tal que se $x_j = f^{j-1}(x_1)$ então*

$$x_n < x_{n-2} < \dots < x_3 < x_1 < x_2 < x_4 < \dots < x_{n-1}$$

ou a reflexão desta ordenação. Um ponto periódico com tal ordenação é chamado de ciclo de Stefan e o subgráfico como indicado no lema é chamado de gráfico de Stefan. Peter Stefan teve a ideia para provar a existência destas órbitas especiais como uma forma de organizar a prova do teorema, Stefan (1977).

Demonstração: Seja $\mathcal{O}(x) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ onde os x_j estão ordenados como na reta, isto é, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Então, $f(x_n) < x_n$, pois $f(x_n)$ é um dos outros x_j . Similarmente, $f(x_1) > x_1$. Sejam

$$a = \max\{y \in \mathcal{O}(x) : f(y) > y\} \quad \text{e} \quad b = \min\{y \in \mathcal{O}(x) : y > a\}$$

Defina $I_1 = [a, b] \in \mathcal{A}$. Existe uma sequência de pequenos passos que nós estabelecemos como afirmações.

1. **AF1.** A imagem de I_1 cobre I_1 , $f(I_1) \supset I_1$.
Prova: De fato, como $f(a) > a$, $f(a) \geq b$. Além disso, como $b > a$, $f(b) < b$ e, assim $f(b) \leq a$. Portanto, $f(I_1) \supset I_1$ como afirmamos.
2. **AF2.** O $n-2$ -ésimo iterado de I_1 cobre todo o intervalo J , $f^{n-2}(I_1) \supset J$.

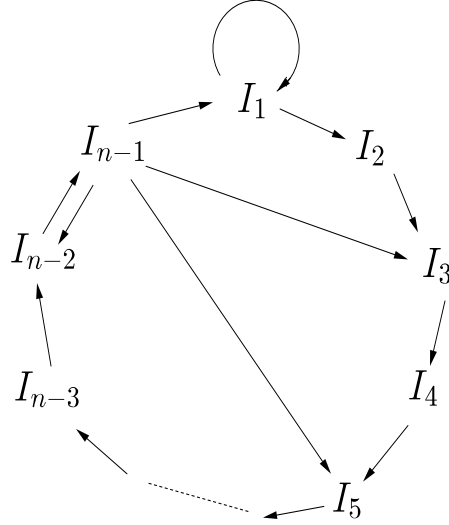


Figura 3.2: Subgráfico para a Partição no Lema 3.4

Prova: Como $f(I_1) \supset I_1$, $f^{k+1}(I_1) \supset f^k(I_1)$, assim os iterados são encaixados. O número de pontos em $\mathcal{O}(x) \setminus \{a, b\}$ é $n - 2$, assim $x_n \in f^k(I_1)$ para algum $1 \leq k \leq n - 2$. Pela propriedade dos intervalos encaixados, $x_n \in f^{n-2}(I_1)$. Analogamente, $x_1 \in f^{n-2}(I_1)$. Como I_1 é conexo, $f^{n-2}(I_1) \supset [x_1, x_n] = J$.

3. **AF3.** Existe um $K_0 \in \mathcal{A}$ com $K_0 \neq I_1$ tal que $K_0 \supset I_1$.

Prova: A prova usa o fato de que n é ímpar, assim, existe mais elementos de um lado do interior de I_1 do que do outro. Chame de \mathcal{P} o conjunto dos elementos de $\mathcal{O}(x)$ que estão do lado do interior de I_1 com mais elementos. Existem $y_1, y_2 \in \mathcal{P}$ com $f(y_1) \in \mathcal{P}$ e $f(y_2) \notin \mathcal{P}$. Tome quaisquer dois pontos adjacentes $y_1, y_2 \in \mathcal{P}$ com iterados como acima. Seja K_0 o intervalo de y_1 a y_2 . Então $f(K_0) \supset I_1$.

4. **AF4.** Existe um laço $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$ com $I_2 \neq I_1$. O laço mais curto com $k \geq 2$ tem $k = n - 1$.

Prova: Seja K_0 como no item 3, assim $f(K_0) \supset I_1$. Pela afirmação **AF2**, $f^{n-2}(I_1) \supset K_0$. Há somente $n - 1$ intervalos distintos em \mathcal{A} , assim existe um laço com $2 \leq k \leq n - 1$.

Suponha por contradição que o menor k nessas condições é estritamente menor que $n - 1$. Como este é o menor laço, nenhum outro laço

pode ser repetido, caso contrário poderíamos encurtar ainda mais. Obviamente, k ou $k + 1$ é ímpar. Seja m este ímpar k ou $k + 1$, assim $1 < m < n$. Use o laço com m intervalos dado por

$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$ ou $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$ dependendo se $m = k$ ou $m = k + 1$. Pelo Lema 3.3(a) existe um ponto z com $f^m(z) = z$. O ponto z deve estar no interior de I_1 , pois os pontos a e b têm período n que é maior que m . Portanto, z tem menor período m , pelo Lema 3.3(b). Como m é ímpar, isto contradiz a hipótese no Lema. Esta contradição prova que $k = n - 1$.

Para o resto da demonstração fixemos I_1, I_2, \dots, I_{n-1} como no item 4.

5. **AF5.**

- (a) Se $f(I_j) \supset I_1$ então $j = 1$ ou $j = n - 1$.
- (b) Para $j > i + 1$ não existe uma aresta de I_i para I_j no grafo.
- (c) O intervalo I_1 f -cobre somente I_1 e I_2 .

Prova: A parte (a) segue do item 4. As partes (b) e (c) seguem porque o laço é o mais curto possível.

6. **AF6.**

- (a) A ordenação dos intervalos I_j na reta real, da afirmação **AF4**, é $I_{n-1} \leq I_{n-3} \leq \dots \leq I_2 \leq I_1 \leq I_3 \leq \dots \leq I_{n-2}$ e a ordem da órbita é $f^{n-1}(a) < f^{n-3}(a) < \dots < f^2(a) < a < f(a) < f^3(a) \dots < f^{n-2}$;
- (b) Ou todas estas ordens são reversas.

Prova: Seja $I_1 = [a, b]$. O intervalo I_1 cobre apenas I_1 e I_2 então eles devem ser adjacentes. Assuma $I_2 \leq I_1$ (A outra possibilidade da a ordenação reversa). Então $f(a) = b$ e $f(b)$ é o ponto mais a esquerda do intervalo I_2 .

Seguindo, temos $f(\partial I_2) = \partial I_3$. Como uma das extremidades de I_3 é igual a $b = f(a)$ que está acima do interior de I_1 , ambas as extremidades de I_3 devem estar acima de $\text{int } I_1$. Além disso, pela afirmação **AF5(a)** (I_2 não f -cobre I_1) e **AF5(b)** (I_2 não f -cobre I_j para $j \geq 3$) I_3 é adjacente a I_1 .

Continue o argumento por indução. Para $k < n - 1$, uma vez que I_k não f -cobre de I_1 e I_k não f -cobre I_j para $j > k + 1$, I_{k+1} deve ser adjacente a I_{k-1} . Isto completa a prova desta afirmação.

7. **AF7.** O intervalo I_{n-1} f -cobre todos os I_j para j ímpar.

Prova: Note que $I_{n-1} = [f^{n-1}(a), f^{n-3}(a)]$. Então $f(f^{n-1}(a)) = f^n(a) = a$. Além disso, $f^{n-3}(a) \in I_{n-3}$, assim $f(f^{n-3}(a)) = f^{n-2}(a) \in I_{n-2}$ é o ponto extremo mais a direita de J (O maior elemento na órbita $\mathcal{O}(x)$). Portanto, $f(I_{n-1}) \supset [a, f^{n-2}(a)] = I_1 \cup I_3 \cup \dots \cup I_{n-2}$. Assim, provamos a afirmação.

Reunindo todas as afirmações, provamos o lema. ■

Agora vamos provar o Teorema 3.2. Primeiramente vamos provar a seguinte proposição que trata o caso em que n é ímpar.

Proposição 3.1. *O Teorema 3.2 é verdadeiro se n é ímpar e maximal na ordenação para o qual o teorema é verdadeiro.*

Demonstração: Tome k com $n \triangleright k$. Existem dois casos: (a) k é par e $k < n$ e (b) $k > n$ com k par ou ímpar.

Caso (a). O inteiro k é par e $k < n$.

Considere o laço de comprimento k dado por $I_{n-1} \rightarrow I_{n-k} \rightarrow I_{n-k+1} \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1}$. Pelo Lema 3.3(a) existe um $x_0 \in I_{n-1}$ com $f^k(x_0) = x_0$. O ponto x_0 não pode estar numa extremidade porque as extremidades tem período n . Portanto x_0 tem período k .

Caso (b). Considere o laço de comprimento k dado por $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_1$. Novamente pelo Lema 3.3 existe um $x_0 \in I_1$ com $f^k(x_0) = x_0$. Se $x_0 \in \partial I_1$ então x_0 tem período n . Portanto n divide k , assim $k \geq 2n \geq n + 3$. Também $f^n(x_0) \in I_1$ o iterado $f^{n+1}(x_0) \notin I_1$ o que contradiz a conclusão do Lema 3.3(a). Portanto $x_0 \notin \partial I_1$, e pelo Lema 3.3(b), x_0 tem período k . Isto completa a prova deste caso e também da proposição. ■

O primeiro passo para provar o resultado para outras valores de n é provar a existência de um ponto periódico de período dois quando existe um ponto de período par.

Lema 3.5. *Se f tem um ponto de período par, então ela tem um ponto de período 2.*

Demonstração: Seja n um número par. Seja a , $I_1 = [a, b]$ e $J = [\min \mathcal{O}(a), \max \mathcal{O}(a)] = [A, B]$ como antes. na prova do Lema 3.4(a) nós usamos somente o fato que n é ímpar para mostrar que existe um $K_0 \in \mathcal{A}$ com $K_0 \neq I_1$ e $f(K_0) \supset I_1$.

Primeiramente assuma que existe tal K_0 . Existe um ciclo minimal com na afirmação **AF4** com $2 \leq k \leq n - 1$. Como antes, I_k cobre todos os I_j do

outro lado. Portanto $I_{n-1} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1}$ é um ciclo de comprimento 2, e existe um ponto de período 2.

Agora vamos assumir que não existe $K_0 \in \mathcal{A}$ com $K_0 \neq 1$ e $f(K_0) \supset I_1$. Segue que (i) todos os pontos $x_j \in \mathcal{O}(a)$ com $x_j \leq a$ temos $f(x_j) \geq b$ e (ii) todos os pontos $x_j \in \mathcal{A}$ com $x_j \geq b$ temos $f(x_j) \leq a$. Como alguns pontos em \mathcal{A} são levados em b e B , ambos $b, B \in f([A, a])$ e assim $f([A, a]) \supset [b, B]$. Similarmente, $f([b, B]) \subset [A, a]$. Então $[A, a] \rightarrow [b, B] \rightarrow [A, a]$ é um ciclo de comprimento 2. Os intervalos são disjuntos e portanto existe um ponto de período 2. ■

Demonstração do Teorema de Sharkovsky

A prova do Teorema de Sharkovsky será dividida nos seguintes casos.

Caso 1: n é ímpar e maximal na ordenação de Sharkovsky e $n \triangleright k$.

Caso 2: $n = 2^m$ e $n \triangleright k$.

Caso 3: $n = 2^m p$ com $p > 1$ ímpar, $m \geq 1$, n é maximal na ordenação de Sharkovsky, e $n \triangleright k$.

Caso 1 está provado acima na proposição 3.1. Vamos dividir o Caso 2 em dois subcasos e provar na sequência.

Caso 2: $n = 2^m$ e $n \triangleright k$, assim $k = 2^s$ com $0 \leq s < m$.

Caso 2a: $s = 0$, isto é, f tem um ponto fixo.

Caso 2b: $s = 1$.

Caso 2c: $s > 1$.

Prova do Caso 2a. Podemos definir a e b como antes com $f(a) \geq b$ e $f(b) \leq a$. Portanto $f([a, b]) \supset [a, b]$ e f tem um ponto fixo. ■

Caso 2b segue do Lema 3.5.

Prova do Caso 2c. Seja $g = f^{k/2} = f^{2^{s-1}}$. A função g tem um ponto de período 2^{m-s+1} com $m-s+1 \geq 2$. Lema 3.5 prova que g tem um ponto x_0 de período 2. Assim $x_0 = g^2(x_0) = f^k(x_0)$ e $x_0 \neq g(x_0) = f^{k/2}(x_0)$. Portanto o período de x_0 para f é 2^t para algum $t \leq s$. Se $t < s$ então x_0 é ponto fixo de g o que é impossível. Portanto $t = s$ e x_0 é um ponto de período $2^s = k$. ■

O Caso 3 será dividido em três subcasos e aparecerá nos exercícios 1, 2 e 3.

3.3 Exercícios

- Suponha que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e tem um ponto periódico de período $n = 2^m p$ com $p > 1$ ímpar, $m \geq 1$ e n é maximal na ordenação de Sharkovsky. Além disso, suponha que $k = 2^s q$ com $s \geq m + 1$ e $q \geq 1$ ímpar. Prove que f tem um ponto periódico de período k .

2. Suponha que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e tem um ponto periódico de período $n = 2^m p$ com $p > 1$ ímpar, $m \geq 1$ e n é maximal na ordenação de Sharkovsky. Além disso, suponha que $k = 2^s$ com $s \leq m$. Prove que f tem um ponto periódico de período k .
3. Suponha que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e tem um ponto periódico de período $n = 2^m p$ com $p > 1$ ímpar, $m \geq 1$ e n é maximal na ordenação de Sharkovsky. Além disso, suponha que $k = 2^m q$ com $s \geq m + 1$ com q ímpar e $q \geq p$ ímpar. Prove que f tem um ponto periódico de período k .

Bibliografia

- [1] Devaney, R. L., *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 2nd. Edition. Addison-Wesley, 1989.
- [2] Robinson, C., *Introduction to the Theory of Dynamical Systems*. Prentice Hall, 2004.

Índice

Órbita

- negativa, 19
- positiva, 19
- total, 19

Bifurcação, 24

Conjunto

- estável local, 23
- hiperbólico atrator, 34
- hiperbólico repulsor, 34
- de Cantor, 32
- negativamente assintótico, 21
- perfeito, 32
- positivamente assintótico, 20
- Quinto-Médio de Cantor, 34
- Terço-Médio de Cantor, 32
- totalmente desconexo, 32

Difeomorfismo, 18

Família

- quadrática, 24, 27

Gráfico de uma partição, 40

Homeomorfismo, 18

- crescente, 26
- decrecente, 26

Laço, 38

Ordenação de Sharkovsky, 40

Ponto

- fixo não hiperbólico, 23
- periódico atrator, 23
- crítico, 21
- fixo, 19
- fixo repulsor, 23
- periódico, 19
- periódico hiperbólico, 22
- pré-periódico, 20

Retrato de fase, 19, 20

Teorema

- de Li e Yorke, 37
- de Li e Yorke
demonstração, 39
- de Sharkovsky, 40