Minicurso – Colóquio de Matemática da Região Norte 2014

Esta é mais uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática para os minicursos ministrados nos Colóquios.

Veja outras publicações da SBM, na livraria virutal que se encontra na página

http://www.loja.sbm.org.br/

Sociedade Brasileira de Matemática

2014

Campos polinomiais e hipersuperfícies algébricas invariantes

Maurício Corrêa
mauricio@mat.ufmg.br

Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas-ICEX
Universidade Federal de Minas Gerais-UFMG

Sociedade Brasileira de Matemática

Rio de Janeiro - RJ, Brasil
2014

Coordenação Editorial:

Flávia Morgana de O. Jacinto

Editora: SBM

Impresso na Gráfica:

Capa: ? ? ?

Patrocínio: Superitendência da Zona Franca de Manaus (SUFRAMA)

Catalogação elaborada pela Biblioteca ???
Bibliotecária: ????

Corrêa Jr, Maurício
Campos polinomiais e hipersuperfícies algébricas invariantes – Rio de Janeiro, RJ : SBM, 2014, ?? p., 20.5 cm - (Minicurso Colóquio CO 2014; v. ??)

ISBN ????-????

Campos de vetores, Integrabilidade algébrica
I. Corrêa Jr, Maurício, III. Título. IV. Série

CDD - 51

Ao amor da minha vida, Cátia.

Agradecimentos

À Deus.

À Rodrigo Bissacot pelo incentivo e sugestão para escrever estas notas.

Aos colegas que, no desenvolvimento deste trabalho, contribuíram de diferentes formas para a sua realização, em especial Marcio Soares, Luis Guillermo, Arturo Perez, Israel Vainsencher, Leonardo Câmara, Omegar Andrade, Renato Vidal e Marcos Jardim.

Aos meus alunos, Vinicius dos Reis, Fernando Lourenço, Michely Oliveira e Alana Nunes, que durante o mestrado participaram de cursos relacionados à essas notas.

À minha família: minha esposa Cátia, meus irmãos Nádia e Douglas, meus sobrinhos Nayara e João Marcos, meu pai Chico e minha tia Vanir.

Ao CNPq, à CAPES e FAPEMIG pelos auxílios concedidos durante a realizaç¸ao deste trabalho.

Voar é fácil. Difícil mesmo é pousar.
Butica.

Conteúdo

Prefácio

O estudo de soluções algébricas para sistemas de equações diefrenciais ordinárias e campos de vetores polinomiais teve inicio no final do século XIX com trabalhos de Poincaré, cujo objetivo era estudo qualitativo do comportamento dinâmico global das soluções do sistema.

Na mesma época, muitos outros matemáticos tais como Darboux, Painlevé e Autonne, dedicaram ao estudo algebro-geométrico de equações diferencias ordinárias polinomiais. Dentre estes, um dos trabalhos de maior destaque são os de Darboux, que encontrou um método para decidir quando todas as soluções de um sistema estão contidas em curvas algébricas. Em termos modernos, decidir quando um campo polinomial no plano complexo tem uma integral primeira racional. Neste caso, dizemos que o campo ou sistema é algebricamente integrável.

Poincaré, admirado com o trabalho de Darboux, provou em (28) que para encontrar integral primeira para um campo é suficiente limitar o grau de uma possível solução geral em termos do grau do campo. Tal problema é nos dias de hoje conhecido como problema de Poincaré.

D. Cerveau e A. Lins Neto em (4) trataram o problema de Poincaré no contexto de folheações holomorfas no plano projetivo complexo. A partir daí, muitos pesquisadores dedicaram-se ao problema de Poincaré e suas generalizações obtendo respostas afirmativas. Destacamos o trabalho de Marcio G. Soares (31) que encontrou uma resposta afirmativa para o problema de Poincaré para hipersuperfíceis sem singularidades invariantes. Mais tarde, Eduardo Esteves em (13) obteve o mesmo resultado, utilizando um argumento puramente algébrico atribuido a Zarisk (23).

J-P. Jouanolou em (20) obteve um melhoramento da teoria de integrabilidade de Darboux. De fato, Darboux demonstra apenas a existência de um integral primeira multivaluada e foi Jouanolou quem demonstrou a existeência de integral primeira racional para campos polinomiais no plano, sempre que o mesmo possui um número suficientemente grande de curvas algébricas invariantes.

Existem várias generalizações do Teorema de Darbou-Jouanolou, veja Jouanolou (21), Ghys (15), Corrêa-Maza-Soares (5) e (6).

Uma versão dinâmico discreto do Teorema de Darboux-Jouanolou foi obtida por Serge Cantat em (3). Na dissertação de mestrado de Vinicius dos Reis (29), mostramos que podemos adaptar a demonstracao de Cantat no contexto de endomorfismos polinomiais.

Neste livro vamos dar uma introdução ao estudo da integrabilidade algebrica de campos polinomiais em $\mathbb{C}^n$. Além disso, mostraremos a versão dinmico discreto de Cantat para endomorfismos polinomiais. Recomendamos a leitura da monografia de Jorge Vitório Pereira (24) que é uma excelente referência para o estudo introdutório da integrabilidade para campos polinomiais no plano complexo.

No capítulo 1, introduzimos conceitos básicos de geometria algébrica afim, campos de vetores e formas diferenciais.

No capítulo 2, demonstramos o Teorema de Darboux-Jouanolou para campos em $\mathbb{C}^n$. A demonstração que apresentaremos sera a dada em (8). Llibre-Zhang mostram em (22) tal teorema usando métodos diferentes. Além disso, introduzimos o conceito de hipersuperfícies extaticas de Lagutinskii-Pereira e demonstramos um critério para existência de integral primeira racional.

Noi capitulo 3, daremos uma resposta afirmativa para o problema de poincare para hipersuperfícies invariantes homogêneas não singulares. A cota foi encontrada por M. Soares em (31) usando teorema de Baum-Bott. Vamos exibir a demonstração de Zarisk-Esteves provada no trabalho de Eduardo Esteves (13).

Finalmente, no ultimo capítulo vamos demostrar o teorema de Cantat.

Belo Horizonte, 30/08/2014.

Maurício Corrêa

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo daremos alguns conceitos básicos, sem nenhum aprofundamento, sobre conjuntos dados por zeros de sistemas de equações polinomiais . Denotamos por $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ o anel de polinômios em n variáveis com coeficientes complexos.

1.1 Variedades algébricas Afins

Definição 1.1. *Sejam $f_1, \ldots, f_s$ polinômios em n variávies complexas, i.e, $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$. O conjunto*

$$\boldsymbol{V}(f_1, \ldots, f_s) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n : f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

*é chamado de **variedade algébrica afim** dada pela solução do sistema de equações polinomiais*

$$\{f_1 = \cdots = f_s = 0\}$$

definido por $f_1, \ldots, f_s$.

No caso em que $s = 1$ e o grau de $f_1 = f$ é d dizemos que $\mathbf{V}(f)$ é uma **hipersuperfície algébrica** de grau d.

Observe que aqui o conceito de variedade não implica em variedade diferenciável. De fato, $V = \{f_1 = \cdots = f_s = 0\}$ é variedade diferenciável(complexa) se $0 \in \mathbb{C}^n$ é valor regular para o mapa $f = (f_1, \ldots, f_s) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^s$.

O conjunto singular de V é definido por

$$Sing(V) = \{p \in V; df(p) \text{ não tem posto máximo}\}.$$

Dizemos que $V_{reg} := V = Sing(V)$ é a parte regular de V que de fato é uma variedade diferencial complexa de dimensão $n - s$.

Exemplo 1.1. *Todo subespaço linear de $\mathbb{C}^n$ é uma variedade algébrica pois é solução de um sistemas de equações polinomiais de grau um.*

Em seguida veremos algumas propriedades de subvariedades algébricas. Antes daremos algumas definições e conceitos importantes.

Definição 1.2. *Sejam $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. O **ideal** gerado por $f_1, \ldots, f_s$ é o subconjunto do espaço de polinômios*

$$\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \{\textstyle\sum_{i=1}^{s} h_i f_i \ : h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x^n]\}.$$

Um simples, porém importante, fato é o seguinte:

Proposição 1.1. *Se $f_1, \ldots, f_s$ e $g_1, \ldots, g_t$ são tais que $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$, então*

$$V(f_1, \ldots, f_s) = V(g_1, \ldots, g_t)$$

Interseções e união de conjuntos algébricos também o são

Lema 1.1. *Se $V, W \subset \mathbb{C}^n$ são variedades afins, então $V \cup W$ e $V \cap W$ também o são .*

Demonstração. Considere $V = \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s)$ e $W = \mathbf{V}(g_1, \ldots, g_t)$, entâão

$$V \cup W = \mathbf{V}(f_i g_j) : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq t),$$

$$V \cap W = \mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t).$$

□

O Lema 1.1 implica que interseções finitas e uniões de variedades afins são ainda variedades afins. Além disso, podemos ver que $\mathbb{C}^n$ e $\emptyset$ também são conjuntos algébricas. Assim , podemos definir uma topologia em $\mathbb{C}^n$ chamada *topologia de Zariski* em que os abertos são os complementares de $V(f_1, \ldots, f_n)$.

Definição 1.3. *Seja $V \subset \mathbb{C}^n$ uma variedade afim. O ideal de V é por definição*

$$I(V) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] : f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad \forall (a_1, \ldots, a_n) \in V\}$$

Claramente vale a seguinte inclusão de conjuntos.

Lema 1.2. *Se $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, então*

$$\langle f_1, \ldots, f_s \rangle \subset I(V(f_1, \ldots, f_s))$$

O próxido exemplo mostra que a igualdade em geral não é válida.

Exemplo 1.2. *Considere a variedade* $\{(0,0)\} \subset \mathbb{C}^2$. *Então o ideal* $I(\{(0,0)\})$ *consiste de todos os polinmios que se anulam na origem. Portanto*

$$I(\{(0,0)\}) = \langle x, y \rangle$$

Por outro lado, veja que $\langle x^2, y^2 \rangle \subset I(V(x^2, y^2))$ *mas* $I(V(x^2, y^2)) \nsubseteq \langle x^2, y^2 \rangle$.

Podemos definir a variedade de um ideal.

Definição 1.4. *Seja* $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ *um ideal. A variedade de* I *por*

$$\boldsymbol{V}(I) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n : f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \quad \forall f \in I\}.$$

Nesses termos temos a

Proposição 1.2. $\boldsymbol{V}(I)$ *é uma variedade afim. Em particular, se* $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$, *então* $\boldsymbol{V}(I) = \boldsymbol{V}(f_1, \ldots, f_s)$.

Proposição 1.3. *Sejam* V *e* W *variedades afim em* $\mathbb{C}^n$. *Então*

i) $V \subset W \Leftrightarrow I(V) \supset I(W)$;

ii) $V = W \Leftrightarrow I(V) = I(W)$.

Demonstração. É suficiente demonstrar a parte *i*). Seja $f \in I(W)$, temos que $f(p) = 0$ para todo $p \in W$. Como $V \subset W$, $f(q) = 0$ para todo $q \in V$. Portanto $f \in I(V)$ e daí $I(W) \subset I(V)$. Por outro lado, se $p \in V$, então por definição $f(p) = 0$ para todo $f \in I(V)$. Como $I(V) \subset I(W)$, então $g(p) = 0$ para todo $g \in I(W)$, logo $p \in W$. □

O próximo Teorema, conhecido como Teorema da base de Hilbert, garante em particular que todo subconjunto algébrico é a interseção de um número finito de hipersuperfícies.

Teorema 1.1 (Teorema da base de Hilbert)**.** *Todo ideal* $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ *é finitamente gerado. Isto é, existem* $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ *tais que*

$$I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle.$$

Seja I um ideal de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ o radical de I é definido por

$$\sqrt{I} = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] : \exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^m \in I\}$$

O Teorema dos Zeros de Hilbert diz que o ideal de uma variedade $V(I)$ é o radical de I.

Teorema 1.2 (Teorema dos Zeros de Hilbert)**.** *Se* $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ *são tais que* $f \in I(V(f_1, \ldots, f_s))$*, então existe* $m \geq 1$ *tal que* $f^m \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ *(e reciprocamente).*

Exemplo 1.3. *Voltando ao exemplo acima vemos que* $I(V(\langle x^2, y^2 \rangle)) = \langle x, y \rangle = \sqrt{\langle x^2, y^2 \rangle}$.

Uma variedade $V \subset \mathbb{C}^m$ é dita **redutível** se ela pode ser escrita como uma união de duas subvariedades próprias não vazias: $V = V_1 \cup V_2$, onde $V \neq V_1$ e $V \neq V_2$. Caso contrário, dizemos que V é irredutível.

Exemplo 1.4. $V(f)$ *é irredutível se, e somente se,* f *é um polinomio irredutível.*

Exemplo 1.5. *Considere a variedade em* $\mathbb{C}^3$ *dada por*

$$V = \boldsymbol{V}(x^3 + xy - xz, yx^2 + y^3 - yz).$$

Não é difícil ver que

$$V = \boldsymbol{V}(x^2 + y^2 - z) \cup \boldsymbol{V}(x, y).$$

Portanto, V *é redutível.*

A seguinte proposção caracteriza variedades irredutíveis.

Proposição 1.4. *Seja* $V \subset \mathbb{C}^n$ *uma variedade afim. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) V *é irredutível;*

ii) $\boldsymbol{I}(V)$ *é um ideal primo;*

Essa caracterização juntamente com o teorema dos Zeros de Hilbert nos dá um dicionário entre álgebra e geometria. Isto é , uma correspondência biunívoca entre **ideais primos** e **variedades algébricas irredutíveis**.

Definição 1.5. *Uma aplicação* $\phi : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ *é dita* ***aplicação polinomial*** *(ou* ***aplicação regular****) se existem polinômios* $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_m]$ *tais que*

$$\phi(a_1, \ldots, a_m) = (f_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, f_n(a_1, \ldots, a_m))$$

para todo $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{C}^n$.

O corpo das funções racionais de $\mathbb{C}^n$ é definido por

$$\mathbb{C}(z_1,\ldots,z_n)=\left\{\frac{f(z_1,\ldots,z_n)}{g(z_1,\ldots,z_n)}:f,g\in\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_n],g\neq 0\right\}.$$

Um mapa $\phi:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^n$ tal que $\phi=(\frac{f_1}{g_1},\ldots,\frac{f_n}{g_n})$ é dito **aplicação racional**.

Repare que ϕ não é uma função propriamente dita pois não está definida ao longa do conjunto algébrico

$$Ind(\phi)=\{f_1=g_1=0\}\cup\cdots\cup\{f_n=g_n=0\}$$

chamado conjunto de indeterminação de ϕ .

A uma função racional $R=P/Q$ associamos uma família de hipersuperfícies algébricas

$$\{P-\lambda Q=0\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$$

que chamadamos de **pencil de hipersuperfícies** associado a P/Q. O conjunto de pólos de P/Q é a hipersuperfície

$$|P/Q|_\infty=\{Q=0\}.$$

Denotaremos por $\mathbb{C}_d[z]$ o espaço vetorial complexo dos polinômios de grau menor ou igual a d. É bem conhecido que

$$\dim\mathbb{C}_d[z]=\binom{d+n}{n}.$$

O espaço de aplicações polinomiais, cujas as funções coordenadas tem grau no máximo d, é isomorfo a $\mathbb{C}_d[z]^{\oplus n}$. Portanto, tal espaço tem dimensão igual a

$$n\binom{d+n}{n}.$$

1.2 exercícios

1. Mostre que $V(f)$ é irredutível se, e somente se, f é um polinomio irredutível.

2. Mostre que $I(V(\langle x^2,y^2\rangle))=\langle x,y\rangle=\sqrt{\langle x^2,y^2\rangle}$.

3. Seja $a=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{C}^n$ um ponto. Mostre que $V=\{a\}$ se, e somente se, $I(V)=\langle z_1-a_1,\ldots,z_n-a_n\rangle$.

4. Mostre que a dimensão do espaço vetorial complexo dos polinômios de grau menor ou igual a d é igual a

$$\dim\mathbb{C}_d[z]=\binom{d+n}{n}.$$

1.3 Campos de vetores e formas holomorfas

Uma função $f : V \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ é dita holomorfa(ou analítica) se em torno de cada ponto f se escreve como uma série de potências ,em n variávies com coeficientes complexas, convergente. Denotamos o conjunto de func cões analícicas por $\mathcal{O}(V)$. É fácil ver que $\mathcal{O}(V)$ tem estrutura de anel.

Um map $F : V \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ é dito holomorfo(ou analítico) se suas funções coordenadas o são. Para mais detalhes sobre a teoria de funções holomorfas em várias variáveis complexas recomendamos a leitura do livro de Marcos Sebastiani (30).

Exemplo 1.6. *Toda função polinomial é analíca.*

1.3.1 Aplicações multilineares e tensores

Sejam $V_1, \ldots, V_r$ e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$[1]. Uma aplicação

$$F : V_1 \times \cdots \times V_r \longrightarrow W,$$

é dita r-linear se, para cada $1 \leq i \leq r$, satisfaz a seguinte condição

$$F(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i + \lambda u_i, v_{i+1}, \ldots, v_r) = F(v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_r) +$$
$$+\lambda F(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, \ldots, v_r),$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e quaisquer $v_i, u_i \in V_i$. Isto é, F é linear em cada variável separadamente.

Exemplo 1.7. *Sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^n$. Agora considere a matriz $[v_1, \ldots, v_n]$, cujas as colunas são formadas pelas coordenadas dos vetores v_i, relativo a base canônica de $\mathbb{K}^n$. A aplicação determinante dada por*

$$\begin{array}{rcc} det : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n}_{n} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v_1, \ldots, v_n) & \longmapsto & det([v_1, \ldots, v_n]) \end{array}$$

é uma aplicação n-linear.

Exemplo 1.8. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão $n+1$ e $B = \{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ uma base de V. Definimos o produto vetorial por*

$$\begin{array}{rcc} \bigwedge : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n} & \longrightarrow & V \\ (v_1, \ldots, v_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} det(\mathcal{A}_i) e_i \end{array}$$

[1] Estaremos considerando espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}(z)$ corpo de funções racionais

onde $\mathcal{A}_i$ é a matriz $n \times n$ omitindo a $i-$ésima linha da matriz $(a_{ij})_{(n+1)\times n}$, vinda da relação $v_j = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} e_i$. Convenientemente usaremos a notação a seguinte notação $\bigwedge(v_1, \ldots, v_n) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$. Observe que $\bigwedge$ é uma aplicação n-linear, devido a linearidade do determinante. No caso em que $n = 2$ observe que temos que $v_1 \wedge v_2 = v_1 \times v_2$, onde " $\times$ " é o produto vetorial de $\mathbb{K}^3$.

Denotamos o espaço de todas as aplicações r-lineares de $V_1 \times \cdots \times V_r$ em W por $\mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_r; W)$. Quando $V_i = V$, para todo $i = 1, \ldots, r$, então condensamos a notação para o espaço de aplicações r-lineares de $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{r-vezes}$ em W da seguinte forma $\mathcal{L}_r(V; W)$.

Sendo $f, g \in \mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_r; W)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então as operações

$$\begin{cases} (F+G)(v_1, \ldots, v_n) = F(v_1, \ldots, v_n) + G(v_1, \ldots, v_n) \\ \\ (\lambda F)(v_1, \ldots, v_n) = \lambda F(v_1, \ldots, v_n) \end{cases}$$

dão a $\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_r : W)$ uma estrutura $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

Definição 1.6. *O produto tensorial de s funcionais $F_i \in \mathcal{L}(V_i; \mathbb{K})$, $i = 1, \ldots, p$, é a aplicação s-linear definida da seguinte forma*

$$\begin{array}{rcl} F_1 \otimes \cdots \otimes F_s : V_1 \times \cdots \times V_r & \to & \mathbb{K} \\ (v_1, \ldots, v_s) & \to & F_1(v_1) \cdots F_s(v_s). \end{array}$$

Repare que $F_1 \otimes \cdots \otimes F_s \in \mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_r; \mathbb{K})$. Portanto, o produto tensorial de funcionais é uma forma de produzir aplicações multilineares de espaços vetoriais com valores no corpo $\mathbb{K}$. Esse tipo de aplicação multilinear é o que mais a frente denominaremos de *tensores*.

Veremos em seguida que podemos produzir, naturalmente, uma base o espaço vetorial $\mathcal{L}_r(V; \mathbb{K}) := \mathcal{L}_r(V)$, formada por produto tensorial de funcionais em V.

Proposição 1.5. *Sejam $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ordenada de um espaço vetorial V e $\mathcal{B}^* = \{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ sua base dual. As forma r-lineares*

$$e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_r}^*$$

formam uma base para $\mathcal{L}_r(V)$, para todo sequência de inteiros $(i_1, \ldots, i_r)$, com $i_k \in \{1, \ldots, n\}$ e $k = 1, \ldots, r$.

Demonstração. Para cada $(s) = (i_1, \ldots, i_r)$ defina $e^{(s)} = e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_r}^*$. Temos que $e^{(s)} \cdot (e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = 1$ e $e^{(s)} \cdot (e_{j_1}, \ldots, e_{j_r}) = 0$ se $(s) \neq (j_1, \ldots, j_r)$.

Dada $F \in \mathcal{L}_r(V;\mathbb{K})$ e sendo $a_{(s)} = F(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$, para cada $(s) = (i_1, \ldots, i_r)$, vemos que

$$F = \sum_{(s)} a_{(s)} e^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{i_r},$$

para toda sequência (s) de r inteiros em $\{1, \ldots, n\}$. Isto mostra que F é combinaão linear dos $e^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{i_r}$. Como o número de sequências (s) é n^r, e este é exatamente a dimensão de $\mathcal{L}_r(V)$, concluimos de fato que

$$\mathcal{L}_r(V) = \langle e^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{i_r} \rangle_{\mathbb{K}}.$$

$\square$

Definição 1.7. *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação multilinear de $\underbrace{E^r \times \cdots \times E^r}_{p-vezes} \times \underbrace{E^* \times \cdots \times E^*}_{q-vezes}$ em $\mathbb{K}$ é chamado de tensor do tipo $\binom{p}{q}$, ou tensor p-covariante, q-contravariante. Isto é, um tensor do tipo $\binom{p}{q}$ é um elemento do $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathcal{L}(\underbrace{E \times \cdots \times E}_{p-vezes} \times \underbrace{E^* \times \cdots \times E^*}_{q-vezes}; \mathbb{K})$.*

Pela proposição 1.5, se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base para um espaço vetorial E, então todo tensor F do tipo $\binom{p}{q}$ em E é da forma

$$F = \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_r \\ i_1,\ldots,i_r}} F^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1,\ldots,j_r} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_r} \otimes e^*_{i_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{i_r}$$

Seja $T : E^n \longrightarrow F^m$ uma aplicação linear e $\omega \in \mathcal{L}_p(F)$ uma p-forma multilinear, então T induz uma p-forma em E dada por

$$T^*(\omega)(e_1, \ldots, e_n) = \omega(Te_1, \ldots, Te_n).$$

Falamos que a p-forma multilinear induzida $T^*(\omega) \in \mathcal{L}_p(E)$ é o *pull-back* de ω por T.

1.3.2 Formas exteriores

Seja $\mathfrak{S}_p$ o grupo das permutações do conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Denotaremos por $\epsilon(s)$ o sinal de uma permutação s de $\mathfrak{S}_p$.

Seja $\omega \in \mathcal{L}_p(E)$ uma forma p-linear uma permutação $s \in \mathfrak{S}_p$ induz uma forma p-linear da seguinte forma $s \circ \omega : (e_1, \ldots, e_n) \mapsto \omega(e_{s(1)}, \ldots, e_{s(n)})$. Assim, cada permutação $s \in \mathfrak{S}_p$ induz um automorfismo de $\mathcal{L}_p(E)$ dado por

$$\begin{array}{rcl} T_s : \mathcal{L}_p(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}_p(E) \\ \omega & \longmapsto & s \circ \omega. \end{array}$$

Além disso, temos que $id \circ \omega = \omega$ e $(s \circ t) \circ \omega = s \circ (t \circ \omega)$.

Definição 1.8. *Uma forma p-linear $\omega \in \mathcal{L}_p(E)$ é dita antisimétrica ou forma exterior de grau p se $s \circ \omega = \epsilon(s)\omega$, para todo $s \in \mathfrak{S}_p$. Denotaremos por $\bigwedge^p E$ o subespaço vetorial de $\mathcal{L}_p(E)$ de todas as p-formas exteriores.*

Vamos em seguida definir um operador $\mathfrak{a} : \mathcal{L}_p(E) \to \bigwedge^p E$, que charemos de *operador de antisimetrização.* Seja $\omega \in \mathcal{L}_p(E)$, a antisimetrização de ω é dada por

$$\mathfrak{a}(\omega) = \sum_{s \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(s) s \circ \omega$$

A seguinte proposição justificará o nome do operador $\mathfrak{a}$ e além disso nos oferecerá algumas propriedades do mesmo.

Proposição 1.6. *Seja $\omega \in \mathcal{L}_p(E)$ uma p-forma multilinear . então:*

i) $\mathfrak{a}(\omega)$ *é antisimétrica.*

ii) se $\omega \in \bigwedge^p E$ *então* $\mathfrak{a}(\omega) = p!\omega$

Demonstração. Para provar a parte $i)$ devemos mostrar que $t \circ \mathfrak{a}(\omega) = \epsilon(t)\mathfrak{a}(\omega)$ para toda permutação $t \in \mathfrak{S}_p$. Com efeito, se $t \in \mathfrak{S}_p$ então

$$\begin{aligned} t \circ \mathfrak{a}(\omega) &= \sum_{s \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(s)\epsilon(t)^2 t \circ (s \circ \omega) \\ &= \epsilon(t) \sum_{s \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(t)\epsilon(s)(t \circ s) \circ \omega = \sum_{s \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(t \circ s)(t \circ s) \circ \omega \\ &= \epsilon(t) \sum_{r \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(r) r \circ \omega = \epsilon(t)\mathfrak{a}(\omega). \end{aligned}$$

Parte $ii)$: como por hipótese ω é antimétrica então $s \circ \omega = \epsilon(s)\omega$, para todo $s \in \mathfrak{S}_p$. Portanto

$$\mathfrak{a}(\omega) = \sum_{s \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(s) s \circ \omega = \sum_{s \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(s)^2 \omega = \sum_{s \in \mathfrak{S}_p} \omega = p!\omega.$$

□

Vejamos agora algumas propriedades muito importantes envolvendo o produto tensorial de p-formas multilineares e a aplicação de antisimetrização. Tais propriedades serão de grande valia para o nosso próximo assunto que é o *produto exterior* de p-formas.

Proposição 1.7. *Sejam $\omega \in \mathcal{L}_p(E)$ e $\vartheta \in \mathcal{L}_q(E)$. então:*

i) $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}(\omega)\otimes\vartheta)=p!\mathfrak{a}(\omega\otimes\vartheta)$ *e* $\mathfrak{a}(\omega\otimes\mathfrak{a}(\vartheta))=q!\mathfrak{a}(\omega\otimes\vartheta)$

ii) $\mathfrak{a}(\omega\otimes\vartheta)=(-1)^{pq}\mathfrak{a}(\vartheta\otimes\omega)$

Demonstração. Parte $i)$: basta mostrar que $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}(\omega)\otimes\vartheta)=p!\mathfrak{a}(\omega\otimes\vartheta)$, a outra igualdade tem prova análoga. Temos que

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}(\mathfrak{a}(\omega)\otimes\vartheta) &= \sum_{s\in\mathfrak{S}_{p+q}}\sum_{t\in\mathfrak{S}_p}\epsilon(s)\epsilon(t)s(t(\omega)\otimes\vartheta)\\
&= \sum_{s\in\mathfrak{S}_{p+q}}\sum_{t\in\mathfrak{S}_p}\epsilon(st)(s\circ t)\circ(\omega\otimes\vartheta)\\
&= p!\sum_{r\in\mathfrak{S}_{p+q}}\epsilon(r)r\circ(\omega\otimes\vartheta)=p!\mathfrak{a}(\omega\otimes\vartheta)
\end{aligned}$$

Parte $ii)$: Seja $t\in\mathfrak{S}_{p+q}$ a permutação definida por

$$\begin{cases} t(i) = q+i, & \text{para } 1\le i\le p\\ t(p+i) = i, & \text{para } 1\le i\le q. \end{cases}$$

Temos que o sinal de t é $(-1)^{pq}$, e ainda

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{a}(\omega\otimes\vartheta))(e_1,\dots,e_{p+q}) &= \sum_{s\in\mathfrak{S}_{p+q}}\epsilon(s\circ t)\omega(e_{st(1)},\dots,e_{st(p)})\vartheta(e_{st(p+1)},\dots,e_{st(p+q)})\\
&= (-1)^{pq}\sum_{s\in\mathfrak{S}_{p+q}}\epsilon(s)\omega(e_{s(q+1)},\dots,e_{st(p+q)})\vartheta(e_{st(1)},\dots,e_{st(q)})\\
&= (-1)^{pq}(\mathfrak{a}(\vartheta\otimes\omega))(e_1,\dots,e_{p+q}).
\end{aligned}$$

□

1.3.3 Produto exterior

Sejam ω uma p-forma exterior e ϑ uma q-forma exterior sobre um $\mathbb{K}$-espaço vetorial E. O *produto exterior* de ω com ϑ é a $(p+q)$-forma exterior dada pela regra

$$\omega\wedge\vartheta=\frac{1}{p!q!}\mathfrak{a}(\vartheta\otimes\omega).$$

Segue desta definiç ão que

$$(\omega\wedge\vartheta)\cdot(e_1,\ldots,e_{p+q}) = \frac{1}{p!q!}\sum_{s\in\mathfrak{S}_{p+q}} \epsilon(s)\omega(e_{s(1)},\ldots,e_{s(p)})\vartheta(e_{s(p+1)},\ldots,e_{s(p+q)}).$$

No seguinte, veremos as propriedades de anti-comutatividade e associatividade do produto exterior.

Proposição 1.8. *Sejam* $\omega \in \bigwedge^p E$*,* $\vartheta \in \bigwedge^q E$ *e* $\beta \in \bigwedge^r E$*. então:*

i) $\omega \wedge \vartheta = (-1)^{pq}\vartheta \wedge \omega$ *(anti-comutatividade)*

ii) $\omega \wedge (\vartheta \wedge \beta) = (\omega \wedge \vartheta) \wedge \beta$ *(associatividade)*

Demonstração. A parte $i)$ segue diretamente definiç ão de produto exterior e da parte $ii)$ da proposição 1.7.

Para parte $ii)$ usaremos a parte $i)$ da proposição 1.7. Com efeito, usando a definiç ão de produto exterior e que $\mathfrak{a}(\omega\otimes\mathfrak{a}(\vartheta\otimes\beta)) = (q+r)!\mathfrak{a}(\omega\otimes(\vartheta\otimes\beta))$ obtemos

$$\begin{aligned}
\omega \wedge (\vartheta \wedge \beta) &= \tfrac{1}{p!(q+r)!}\mathfrak{a}(\omega \otimes (\vartheta \wedge \beta)) \\
&= \tfrac{1}{p!(q+r)!}\tfrac{1}{q!r!}\mathfrak{a}(\omega \otimes \mathfrak{a}(\vartheta \otimes \beta)) = \tfrac{1}{p!(q+r)!}\tfrac{1}{q!r!}(q+r)!\mathfrak{a}(\omega \otimes (\vartheta \otimes \beta)) \\
&= \tfrac{1}{p!q!r!}\mathfrak{a}(\omega \otimes (\vartheta \otimes \beta)) = (\omega \wedge \vartheta) \wedge \beta.
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.9. *Sejam* $\omega_1,\ldots,\omega_p \in E^*$ *e* $v_1,\ldots,v_p \in E$*. então*

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p(v_1,\ldots,v_p) = det[\omega_i(v_j)].$$

Demonstração. Isto segue aplicando a definiç ão de produto exterior. Com efeito,

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p(v_1,\ldots,v_p) = \sum_{s\in\mathfrak{S}_p} \epsilon(s)\omega_1(e_{s(1)})\cdots\omega_p(e_{s(p)}) = det[\omega_i(v_j)].$$

□

Definição 1.9. *Uma p-forma exterior* α *sobre um espaço vetorial* E *é dita decomponível se existem formas lineares* $\omega_1,\ldots,\omega_p \in E^*$ *tais que*

$$\alpha = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p.$$

Veremos que toda p-forma exterior é combinaão linear de p-formas decomponíveis.

Proposição 1.10. *Seja $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma uma base para o espaço $\mathbb{K}$-vetorial E e seja $\mathcal{B}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ sua base dual. então*

$$\bigwedge^p \mathcal{B} := \{v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_p}^*, 1 \leq i_1 \leq \cdots i_p \leq n\}$$

forma uma base para o espaço de p-formas $\bigwedge^p E$.

Demonstração. Com efeito, para toda p-upla $(i_1, \dots, i_p)$ e $(j_1, \dots, j_p)$ de sequências crecentes de números $\{1, \dots, n\}$, temos o seguinte

$$v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_p}^*(v_{j_1}, \dots, v_{j_p}) = \begin{cases} 1 & \text{se } i_1 = j_r \quad \text{para todo } r \\ \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

□

Isto mostra que se $\alpha \in \bigwedge^p E$ então existem $f_{i_1,\dots,i_p} \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_p} f_{i_1,\dots,i_p} v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_p}^*.$$

1.3.4 Álgebra de Grassman

Seja E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão n. Considere o seguinte $\mathbb{K}$-espaço vetorial

$$\bigwedge E = \mathbb{K} \oplus E \oplus \bigwedge^2 E \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n E.$$

Temos que $dim_{\mathbb{K}}(\bigwedge E) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$ e que cada elemento $\Omega \in \bigwedge E$, pode ser escrito, de modo único, como soma $\Omega = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n$, $\omega_i \in \bigwedge^i E$, $i = 0, \dots, n$. Lembre que $\bigwedge^0 E = \mathbb{K}$ e que $\bigwedge^1 E = E$.

Colocaremos um produto em $\bigwedge E$ em termos do produto exterior. Tal produto dará a este espaço uma estrutura de ágebra graduada, anti-comutativa, associativa e com unidade, conhecida como *Álgebra de Grassmann.* O produto é uma aplicação $(\cdot) : \bigwedge E \times \bigwedge E \to \bigwedge E$ definido naturalmente da seguinte forma: sejam $\Omega = \sum_{i=0}^{n} \omega_i$ e $\Theta = \sum_{i=0}^{n} \theta_i$, então

$$\begin{aligned}\Omega \cdot \Theta &= (\omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n) \wedge (\theta_0 + \omega_1 + \cdots + \theta_n) \\ &= \omega_0\theta_0 + (\omega_0\theta_1 + \omega_1\theta_0) + (\omega_0\theta_2 + \omega_1 \wedge \theta_1 + \omega_2\theta_0) + \cdots \\ &= \sum_{r=0}^{n} \left(\sum_{i+j=r} \omega_i \wedge \theta_j \right).\end{aligned}$$

Com este produto vemos que $(\bigwedge^i E)\cdot(\bigwedge^j E) \subset \bigwedge^{i+j} E$, ou seja, o espaço $\bigwedge E$ é uma ágebra graduada. Além disso, segue das propriedades de associatividade e anti-comutatividade do produto exterior que $\bigwedge E$ é anti-comutativa e associativa.

Definição 1.10. *Uma sequência de aplicações lineares entre espaços vetoriais*

$$E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} G$$

é dita exata se $Ker(\psi) = Im(\varphi)$.

1.3.5 Produto interior ou contração

Seja ω uma p-forma exterior sobre um espaço vetorial E. Para cada vetor $v \in E$ definimos a seguinte aplicação linear

$$i_v : \bigwedge^p E \longrightarrow \bigwedge^{p-1} E$$

definida por $i_v(\omega) : (e_1, \ldots, e_{p-1}) \longmapsto \omega(v, e_1, \ldots, e_{p-1})$.

Definição 1.11. *O aplicação linear* i_v *é chamado produto interior ou contração .*

Veremos como opera o produto interior com o produto exterior de formas exteriores.

Teorema 1.3. *Sejam* $\omega \in \bigwedge^p E$, $\theta \in \bigwedge^q E$ *e* $v \in E$. *então*

$$i_v(\omega \wedge \theta) = (i_v(\omega)) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge (i_v(\theta)).$$

1.4 Equações diferenciais ordinárias e campos de vetores

Um campo de vetores X num aberto $V \subset \mathbb{C}^n$ é uma aplicação que associa cada ponto $p \in V$ um operador $X(p)$ agindo no espaço de funções holomorfas definidas numa vizinhança de p , satisfazendo:

i) $X(p) : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(V)$ é $\mathbb{C}$-linear

ii) $X(p)(f \circ g) = f(p)X(p)(g) + g(p)X(p)(f)$, para todo $f, g \in \mathcal{O}(V)$.

Uma aplicação $X(p) : \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(V)$ satisfazendo *i)* e *ii)* acima é chamado de deviração. Podemos escrever

$$X(f) = i_X df = df(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial f}{\partial z_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right) (f).$$

Considere uma equação diferenciável ordinária (EDO) complexa da forma

$$\frac{dz_1}{dt} = P_1(z_1, \ldots, z_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dz_n}{dt} = P_n(z_1, \ldots, z_n),$$

onde $P_1, \ldots, P_n$ são polinmios em n variávies complexas.

Uma aplicação holomorfa $\gamma : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ é uma solução do sistema acima se

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = (P_1(\gamma(t)), \ldots, P_n(\gamma(t)))$$

para todo $t \in U$. O teorema de existência e unicidade para EDO's complexas (19) garante a existencia de soluções para sistemas polinomiais. Seja $\gamma : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ uma solução com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = (P_1(\gamma(0)), \ldots, P_n(\gamma(0)))$. Temos a a devivação em p dada por

$$X_p = \frac{d(f \circ \gamma(t))}{dt})|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} P_i(\gamma(0)) \frac{\partial f}{\partial z_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} P_i(\gamma(0)) \frac{\partial}{\partial z_i} \right) (f).$$

Portanto, a cada EDO complexa podemos associar um campo de vetores

$$X = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

1.4.1 p-formas e p-vetores diferenciais

Uma p-forma holomorfa num aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ é uma aplicação holomorfa

$$\omega : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \bigwedge^p (\mathbb{C}^n)^*.$$

Toda p-forma holomorfa pode ser escrito como

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} f_{i_1,\ldots,i_p} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p},$$

onde $f_{i_1,\ldots,i_p} \in \mathcal{O}(U)$. Denotaremos por $\bigwedge^q(U)$ o espaço de q-formas holomorfas definidas no aberto $U \subset \mathbb{C}^n$.

Definição 1.12. *Seja $\omega = \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_p} f_{i_1,\ldots,i_p} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}$ uma p-forma holomorfa. A diferencial exterior de ω é a $(p+1)$-forma holomorfa dada por*

$$d\omega := \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} dP_{i_1,\ldots,i_p} \wedge dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p},$$

onde $dP_{i_1,\ldots,i_p} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial P_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial z_j} dz_j$.

Vimos na seção o pull-Back de formas exteriores. Podemos analogamente definir o pull-back de formas holomorfas. Com efeito, considere uma aplicaçào holomorfa $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{C}^m$ e uma p-forma holomorfa

$$\theta = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} f_{i_1,\ldots,i_p} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \in \bigwedge^p(V).$$

O pull-back de θ por φ é por definição a p-forma em $U \subset \mathbb{C}^n$ dada por

$$\varphi^*\theta := \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n} (f_{i_1,\ldots,i_p} \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_p},$$

Proposição 1.11. *Seja $F : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{C}^m$ uma aplicą ao holomorfa e $\omega \in \bigwedge^q(V)$ e $\theta \in \bigwedge^p(V)$. Então:*

i) $f^*(\omega \wedge \theta) = f^*\omega \wedge f^*\theta \in \bigwedge^q(M)$;

ii) $df^*(\omega) = f^*(d\omega)$;

iii) $d^2(\omega) = 0$;

iv) $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^{pq}\omega \wedge d\theta$

Demonstração. Deixamos a cargo do leitor como exercício. $\square$

Um p-campo de vetores holomorfo definido num aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ é uma aplicação holomorfa

$$\upsilon : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \bigwedge^p \mathbb{C}^n$$

que por sua vez pode ser escrito da forma

$$\upsilon = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_p} g_{i_1,\ldots,i_p} \frac{\partial}{\partial z_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial z_{i_p}},$$

com $g_{i_1,\ldots,i_p} \in \mathcal{O}(U)$. Portanto um 1-campo de vetores é simplesmente um campos e vetores como definimos acima.

1.5 Exercício

1 *Sejam $\omega \in \mathcal{L}_p(F)$, $\vartheta \in \mathcal{L}_q(F)$ e $T : E \to F$ uma aplicação linear, então:*

a) $T^*(\mathfrak{a}(\omega)) = \mathfrak{a}(T^*\omega)$

b) $T^*(\omega \otimes \vartheta) = T^*(\omega) \otimes T^*(\vartheta)$.

2 *Sejam $\omega \in \bigwedge^p E$ e $\vartheta \in \bigwedge^1(E)$. Mostre que*

$$(\omega \wedge \vartheta) \cdot (e_1, \ldots, e_{p+1}) = \sum_{1 \leq i \leq p+1} (-1)^{i-1} \omega(e_i) \vartheta(e_1, \ldots, e_{i-1}, \widehat{e_i}, e_{i+1}, \ldots, e_{(p+1)}).$$

3 *Sejam $\omega \in \bigwedge^p E$ e $\vartheta \in \bigwedge^p(E)$. Mostre que a aplicação produto exterior*

$$\begin{array}{rcl} (\wedge) : \bigwedge^p E \times \bigwedge^p(E) & \longrightarrow & \bigwedge^{p+q}(E) \\ (\vartheta, \omega) & \longmapsto & \omega \wedge \vartheta \end{array}$$

é bilinear.

4 . Seja $F : V \times \cdots \times V \longrightarrow W$, uma aplicação $r-$linear. Mostre as equivalências:

a) F é alternada

b) $F(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_r) = -F(v_1, \ldots, v_{i+1}, v_i, \ldots, v_r)$

c) $F(v_1, \ldots, v, v, \ldots, v_r) = 0$

5 . Sejam $v_1, \dots, v_n \in V^{n+1}$. Mostre que $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = 0$ se, e somente se, $v_1, \dots, v_n$ são linearmente dependentes.

6 . Sejam $\omega \in \bigwedge^p(F)$, $\vartheta \in \bigwedge^q(F)$ e $T : E \to F$ uma aplicação linear, então $T^*(\omega \wedge \vartheta) = (T^*\omega) \wedge (T^*\vartheta)$.

7 . Sejam $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ linearmente independes. O paralelep'ipedo formado por $v_1, \dots, v_n$ é o conjunto compacto dado por

$$\mathcal{P}(v_1, \dots, v_n) = \{a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \in \mathbb{R}^{n+1};\ \ 0 \le a_i \le 1\}.$$

O volume de $\mathcal{P}(v_1, \dots, v_n)$ é igual a $\sqrt{det(g)}$, onde $g = (\langle v_i, v_j \rangle)$ é a chamada matriz de Gram. Mostre que :

a) $vol(\mathcal{P}(v_1, \dots, v_n)) = \|v_1 \wedge \cdots \wedge v_n\|$, onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana de $\mathbb{R}^{n+1}$.

b) $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ é perpendicular a todos os v_i.

c) $det(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n, v_1, \dots, v_n) > 0$ se $v_1, \dots, v_n$ forem linearmente independentes.

8 . Seja V um espaço vetorial de dimensão 4 e $\{v_1, \dots, v_4\}$ uma base. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz anti-simétrica. Defina

$$\vartheta = \sum_{i<j} a_{ij} v_i \wedge v_j.$$

Mostre que $\vartheta \wedge \vartheta = 0 \Leftrightarrow det(A) = 0$.

9 . Sejam $T : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear, com $dim_{\mathbb{K}} E = n$ e $det(E) := \bigwedge^n E$. Como já foi visto a aplicação T induz por, pull-back, uma aplicação linear

$$T^* : det(E) \longrightarrow det(E).$$

Neste caso, como $dim_{\mathbb{K}}(det(E)) = 1$ temos que $T^* = \lambda(T)T$ para todo $T \in \bigwedge^n E$. Mostre que $\lambda(T) = det(T)$. Usando isto conclua que se $\omega_1, \dots, \omega_n \in E^*$ então

$$T^*\omega_1 \wedge \cdots \wedge T^*\omega_n = det(T)\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n.$$

10 . Seja $\{v_1, \dots, v_r\}$ uma base para um subespaço linear $S \subset E$, onde $dim_{\mathbb{K}} E = n$.

a) Mostre que $S = \{u \in E; u \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_r = 0\}$.

b) Mostre que o conjunto $V = \{u \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_r; u \in E\}$ tem dimensão $n - r$ em $\bigwedge^{r+1} E$.

c) Defina $\vartheta = (v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)$ e considere a aplicação $(\wedge\vartheta) : E \longrightarrow \bigwedge^{r+1} E$ definida por $(\wedge\vartheta)(u) = u \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$. Se $i : S \longrightarrow E$ é a inclusão de S em E, conclua que a sequência de espaços vetoriais

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\wedge\vartheta} V \longrightarrow 0.$$

é exata.

11 . Dados $\omega \in \bigwedge^r E$ e $\theta \in \bigwedge^{r+s} E$, dizemos que ω é divisível por θ se existe $\alpha \in \bigwedge^r E$ tal que $\theta = \omega \wedge \alpha$. Mostre que uma $(r+1)$-vetor $\omega \in \bigwedge^{r+1} E$ é divisível por $\theta \in E$ se, e somente se, $\omega \wedge \theta = 0$.

12 . Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_{2p-1}, v_{2p}$ são vetore s linearmente independentes no espaço vetorial E. Pondo $\vartheta = v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4 \cdots + v_{2p-1} \wedge v_{2p}$, prove que

$$\frac{\vartheta^p}{p!} = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_{2p},$$

onde $\vartheta^p = \underbrace{\vartheta \wedge \cdots \wedge \vartheta}_{p-vezes}$.

13 . Sejam $u, v \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Prove as seguintes propriedades:

i) $i_{u+v} = i_u + i_v$ e $i_{au} = a i_u$ (linearidade)

ii) $i_u i_v = -i_v i_u$ (anti-simetria)

iii) $i_u^2 = 0$.

14 . Seja $F : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow V \subset \mathbb{C}^m$ uma aplica¸ao holomorfa e $\omega \in \bigwedge^q(V)$ e $\theta \in \bigwedge^p(V)$. Então:

i) $f^*(\omega \wedge \theta) = f^*\omega \wedge f^*\theta \in \bigwedge^q(M)$;

ii) $df^*(\omega) = f^*(d\omega)$;

iii) $d^2(\omega) = 0$;

iv) $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^{pq}\omega \wedge d\theta$

Capítulo 2

Integrabilidade algébrica para campos polinomiais

Vamos neste capítulo estudar teorema de integrabilidade algébrica de Darboux-Jouanolou. Buscamos condiçø es para a existência de uma integral primeira racional para campos de vetores polinomiais em $\mathbb{C}^n$. A demonstração que apresentaremos, da versão para campos, será a do artigo (8). J. Llibre e Zhang em (22) mostraram esse resultado usando técnicas diferentes.

Provaremos o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Seja X um campo de vetores polinomiais em $\mathbb{C}^n$ de grau d. Se X admite*

$$\binom{d+n-1}{n} + n$$

hipersuperfícies algébricas irredutíveis invariantes, então X admite uma integral primeira racional.

Este Teorema nos diz, em particular, que se o campo não admite integral primeira racional então o numero de hipersuperficies algébricas invariantes é no máximo

$$\binom{d+n-1}{n} + n.$$

Esta cota está longe de ser otimal. Porém, se fixarmos o grau das hipersuperfíceis invariantes podemos encontrar uma cota melhor usando um método introduzido por Jorge Vitório Pereira em (26) chamada de hipersuperfíceis extacticas. Conceito de extacticas também foi explorado pelo matemáfico russo Lagutinskii (11), portanto chamamos tal teoria de *teoria de integrabilidade de Lagutinskii-Pereira.*

No caso de hiperplanos invariantes veremos que tal cota é atingida.

O segundo resultado deste captítulo será o seguinte:

Teorema 2.2. *Seja X um campo polinomial em $\mathbb{C}^n$ de grau d. Suponha que X não admite integral primeira racional. Então o número de hipersuperfícies irredutíveis invariantes por X, de grau k, é no máximo*

$$\binom{n+k}{k} + \frac{1}{k}\binom{\binom{n+k}{k}}{2}(d-1).$$

Em particular, o campo X admite no máximo

$$\binom{n+1}{2}(d-1) + n + 1. \tag{2.0.1}$$

hiperplanos invariantes. Além disso, essa cota é otimal.

2.1 Teorema de Darboux-Jouanolou

Um campo de vetores polinomiais em $\mathbb{C}^n$ de grau d é da forma

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

onde $P_i \in \mathbb{C}[z]$ e $d = \max\{\deg(P_i),\, i = 1, ..., n\}$. Escreveremos por simplicidade $\mathbb{C}[z]$ ao invés de $\mathbb{C}[z_1, \ldots z_n]$.

Definição 2.1. *Sejam $V(f)$ uma hipersuperfície algébrica em $\mathbb{C}^n$ e X um campo de vetores polinomiais. Dizemos que V é invariante por X se $df(X)(p) = 0$ para todo $p \in V$. Em particular, vale $df(X) \in I(V)$.*

A invariância de V por X significa que $X(p) \subset T_pV_{reg}$, onde $V_{reg} = V \setminus Sing(V)$ é a parte regular de V. Isto é, as órbitas do campo estão inteiramente contidas em V. Isso justifica o termo invariância pois V é invariante pelo fluxo do campo.

Proposição 2.1. *Sejam $V = \{f = 0\}$ uma hipersuperfície irredutível em $\mathbb{C}^n$ e X um campo de vetores polinomiais invariantes de grau d. Então , V é invariante por X se, e somente se, existe um polinômio $h_f \in \mathbb{C}[z]$, de grau no máximo $d-1$, tal que $X(f) = h_f f$.*

Demonstração. Esta proposição é uma consequência do teorema dos zeros de Hilbert. Com efeito, a invariância implica em $df(X) \in I(V)$. □

Exemplo 2.1 (Formula de Euler)**.** *Suponha que* $V = \{f = 0\}$ *é tal que* f *é um polinômio homogêneo de grau* k*. Então vale a seguinte fórmula conhecida como formula de Euler*

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \cdots + z_n \frac{\partial f}{\partial z_n} = kf.$$

Isto nos diz que toda hipersuperficie algébrica homogênea é invariante pelo campo radial

$$R = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + z_n \frac{\partial}{\partial z_n}.$$

Definição 2.2. *Seja* $R = P/Q \in \mathbb{C}(z_1, ..., z_n)$ *uma função racional. Considere o pencil de hipersuperfícies induzido por* R *dado por* $\{P - \lambda Q = 0\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$*. Dizemos que* R *é uma integral primeira racional para* X *se*

$$V_\lambda = \{P - \lambda Q = 0\}$$

é invariante por X *para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$*.*

Corolário 2.1. *Seja* R *uma função racional. Então* R *é uma integral primeira racional para* X *se, e somente, se* $X(R) \equiv 0$

Demonstração. Segue diretamente da proposição 2.1. □

Proposição 2.2. *Seja* $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ *e considere a* n*-forma* $\eta_1 \wedge ... \wedge \eta_n$*. Então*

$$i_X(\eta_1 \wedge ... \wedge \eta_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} P_i \eta_1 \wedge ... \wedge \hat{\eta}_i \wedge ... \wedge \eta_n.$$

Onde $\hat{\eta}_i$ *significa a omissão do termo* η_i*.*

Lema 2.1. *Seja* X *um campo de vetores polinomiais em* $\mathbb{C}^n$ *e* $\eta_1, ..., \eta_n$ *1-formas racionais tais que* $\eta_i(X) = 0$ $\forall i = 1, ..., n$*. Então* $\eta_1, ..., \eta_n$ *são* $\mathbb{C}(z)$*-linearmente dependentes.*

Demonstração. Suponha $\eta_1, ..., \eta_n$ são $\mathbb{C}(z)$-linearmente independentes. Então existe uma função racional $R \neq 0$ tal que

$$\eta_1 \wedge ... \wedge \eta_n = R dz_1 \wedge ... \wedge dz_n.$$

De fato, $\eta_i = \sum R_{ij}dz_j$, onde $R_{ij} \in \mathbb{C}(z)$. Fazendo o produto exterior de $\eta_1, ..., \eta_n$, temos

$$\eta_1 \wedge ... \wedge \eta_n = Rdz_1 \wedge ... \wedge dz_n, \text{ onde } R = det[R_{ij}].$$

Contraindo $\eta_1 \wedge ... \wedge \eta_n$ na direção de $X = \sum_{i=1}^{n} P_i \dfrac{\partial}{\partial z_i}$ resulta

$$i_X(\eta_1 \wedge ... \wedge \eta_n) = \underbrace{i_X(\eta_1) \wedge (\widehat{\eta_1} \wedge \eta_2 \wedge ... \wedge \eta_n)}_{0} + (-1)^1 \eta_1 \wedge \underbrace{i_X((\widehat{\eta_1} \wedge \eta_2 \wedge ... \wedge \eta_n))}_{(*)}.$$

Observe que (*) será igual a zero. Utilizando a linearidade da contração temos

$$(i_X Rdz_1 \wedge ... \wedge dz_n) = Ri_X(dz_1 \wedge ... \wedge dz_n).$$

Daí

$$Ri_X(dz_1 \wedge ... \wedge dz_n) = 0 \ \forall i = 1, ..., n.$$

Como $R \neq 0$ e utilizando a proposição 2.2 , temos

$$(dz_1 \wedge ... \wedge dz_n)(X) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1 \Rightarrow}^{n} (-1)^{i-1} P_i dz_1 \wedge ... \wedge \widehat{dz_i} \wedge ... \wedge dz_n = 0.$$

Isto significa, que

$$P_1 = ... = P_n = 0.$$

Isto é, $X \equiv 0$. Absurdo. □

Prova do Teorema 2.1

Demonstração. Denote por $\mathbb{C}_{d-1}[z]$ o espaço vetorial dos polinômios de grau no máximo $d-1$. Como vimos a dimensão de $\mathbb{C}_{d-1}[z]$ é dada por

$$dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{d-1}[z] = N := \begin{pmatrix} d-1+n \\ n \end{pmatrix}.$$

Sejam $f_1, ..., f_{N+n}$ equações definindo hipersuperfícies irredutíveis invariantes por X. Segue da proposição 2.1 que

$$\frac{df_j}{f_j}(X) = h_{f_j} \in \mathbb{C}_{d-1}[z], j = 1, ..., N+m.$$

Como $N = dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_{d-1}[z])$ seguem as seguintes relações

$$\sum_{j=i}^{N+i} \lambda_{ij} h_{f_j} = 0, i = 1, ..., n, \tag{2.1.2}$$

onde $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$. Além disso, podemos supor que $\lambda_{ii} \neq 0$. Defina as 1-formas racionais

$$\eta_i = \sum_{j=i}^{N+i} \lambda_{ij} \frac{df_j}{f_j}, i = 1, ..., n.$$

Denotemos por $|\eta_i|_\infty$ o conjunto de polos de η_i. Por construção

$$|\eta_i|_\infty \subset \bigcup_{j=i}^{N+i} \{f_j = 0\}.$$

Contraindo na direção de X e usando (2.1.2) temos

$$\eta_i(X) = \sum_{j=i}^{N+i} \lambda_{ij} \frac{df_j}{f_j}(X) = \sum_{j=i}^{N+i} \lambda_{ij} h_{f_j} = 0; i = 1, ..., n.$$

Segue do lema (2.1) que as 1-formas invariantes racionais $\eta_1, ..., \eta_n$ são linearmente dependentes sobre as funções racionais $\mathbb{C}(z)$. Seja V o espaço $\mathbb{C}(z)$-linear gerado por $\{\eta_1, ..., \eta_n\}$. Suponha que $dim_{\mathbb{C}(z)} V = k$ e que

$$V = \langle \eta_1, ..., \eta_k \rangle_{\mathbb{C}(z)}.$$

Existem funções racionais $R_1, ..., R_k \in \mathbb{C}(z)$, tais que

$$\eta_{n+1} = R_1 \eta_1 + ... + R_k \eta_k. \tag{2.1.3}$$

Diferenciando a equação (2.1.3) resulta

$$0 = dR_1 \wedge \eta_1 + ... + dR_k \wedge \eta_k,$$

pois $d\eta_i = \sum_{j=i}^{N+i} \lambda_{ij} d(\frac{df_j}{f_j}) = 0$. Contraindo por X temos

$$0 = X(R_1)\eta_1 + ... + X(R_k)\eta_k$$

Assim $X(R_i) = 0$, para todo $i = 1, ..., k$. Isto é, as funções racionais $R_i, i = 1, ..., k$, ou são integrais primeiras para o campo de vetores X ou são constantes. Resta observar que pelo menos uma função racional R_i é não constante. Se R_i, para todo $i = 1, ..., k$, é constante segue de (2.1.3) que

$$|R_1\eta_1 + ... + R_k\eta_k|_\infty = |\eta_{n+1}|_\infty.$$

Mas

$$\bigcup_{i=1}^{k}\{f_i = 0\} \subset |R_1\eta_1 + ... + R_k\eta_k|_\infty \text{ e } \bigcup_{i=1}^{k}\{f_i = 0\} \not\subset |\eta_{n+1}|_\infty,$$

uma contradição. □

2.2 Integrabilidade algébrica de Lagutinskii-Pereira

O teorema de Darboux-Jounolou nos diz, em particular, que se o campo não admite integral primeira racional então o numero de hipersuperficies algébricas invariantes é no máximo

$$\left(\begin{array}{c} d+n-1 \\ n \end{array}\right) + n.$$

Esta cota está longe de ser otimal. Porém, se fixarmos o grau das hipersuperfíceis invariantes podemos encontrar uma cota melhor usando um a teoria de *integrabilidade algébrica de Lagutinskii-Pereira.*

Neste capitulo, exploraremos este conceito dando um outro critério para existência de integrais primeiras racionais. Em particular, obtemos uma cota otimal para o numero de hiperplanos invariantes.

Definição 2.3. *Se X é um campo de vetores em $\mathbb{C}^n$. O r-ésimo polônomio extactico de X é dado por*

$$\mathcal{E}_n(X) = det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_l \\ X(v_1) & X(v_2) & \dots & X(v_l) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X^{l-1}(v_1) & X^{l-1}(v_2) & \cdots & X^{l-1}(v_l) \end{pmatrix} \tag{2.2.4}$$

onde $v_1, v_2, \cdots, v_l$ é uma base de $\mathbb{C}_r[z]$, o $\mathbb{C}$-espaço vetorial dos polinômios de grau no máximo r, e $l = \dim \mathbb{C}_r[z]$, $X^0(v_i) = v_i$ e $X^j(v_i) = X^{j-1}(X(v_i))$. A Hipersuperficie dada pelos zeros do polinomio extactico $\{\mathcal{E}_n(X) = 0\}$ é chamada de r-ésima Hipersuperficies extactica de X.

Deixamos a cargo do leitor mostrar que a definição de Hipersuperficies extactica independe da escolha de base. Observe que se o campo for o campo constante $X = \frac{\partial}{\partial t}$ e $v_1, v_2, \cdots, v_l$ são polinômios em uma variavel $\mathbb{C}[t]$ o determinante

$$det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_l \\ v_1' & v_2' & \ldots & v_l' \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ v_1^{(l-1)} & v_2^{(l-1)} & \ldots & v_l^{(l-1)} \end{pmatrix} \tag{2.2.5}$$

é o wronskiano $W(v_1, \ldots, v_r)$ das funções $v_1, \ldots, v_r$.

Proposição 2.3. *Toda curva algébrica de grau r invariante pelo campo de vetores X é um fator de $\mathcal{E}_r(X)$.*

Demonstração. Seja $\{f = 0\}$ uma hipersuperficie algébrica invariante por X e de grau r. Como a definição de hipersuperficie extactica é independente da escolha da base de $\mathbb{C}_n[z]$, tomamos $v_1 = f$. A condiçào de invariância implica que $X^i(f) = h_i f$ para todo i, onde $h_i \in \mathbb{C}[z]$. Dessa forma, temos f um fator de $\mathcal{E}_r(X)$ pois f divide todo elemento na primeira coluna da matriz correspondente. $\square$

Teorema 2.3. *Seja X um campo de vetores em $\mathbb{C}^n$. Então $\mathcal{E}_r(X) = 0$ e $\mathcal{E}_{r-1}(X) \neq 0$ se, e somente se, X admite uma integral primeira racional.*

Demonstração. Suponha que $R = \frac{P}{Q}$ seja uma integral primeira para X. Então as hipersuperficies de nível de $\left\{\frac{P}{Q} = \lambda\right\}$ com $\lambda \in \mathbb{C}$, são hipersuperfícies invariantes por X. Pela proposição (2.3), elas são fatores da extactica $\mathcal{E}_n(X)$. Como existem um número infinito destas curvas, temos $\mathcal{E}_n(X) \equiv 0$.

Reciprocamente, se $\mathcal{E}_n(X) \equiv 0$ então as linhas da matriz extactica são linearmente dependentes sobre o corpo da funções racionais $\mathbb{C}(z)$. Portanto, existem funções racionais $\alpha_i \in \mathbb{C}(z)$ tais que

$$\mathcal{N}_j := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X^j(v_i) = 0, \quad j = 0, \ldots, k-1, \tag{2.2.6}$$

com $k = \dim \mathbb{C}_r[z]$.

Agora, tome k o menor valor tal que existem funções racionais α_i para $i = 1, \ldots, k$, não todas nulas, e $v_i \in \mathbb{C}_r[z]$ para $i = 1, \ldots, k$ linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$, tais que (2.2.6) vale. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\alpha_k = 1$.

Notemos que $\mathcal{N}_{j+1} := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X^{j+1}(v_i) = 0, \quad j = 0, \ldots, k-2$. Daí

$$\begin{aligned} X(\mathcal{N}_j) - \mathcal{N}_{j+1} &= \sum_{i=1}^{k} \left[X(\alpha_i) X^j(v_i) + \alpha_i X^{j+1}(v_i) \right] - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i X^{j+1}(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} X(\alpha_i) X^j(v_i) = 0 \qquad j = 0, \ldots, k-2. \end{aligned}$$

Da minimalidade de k, vemos que os termos $X(\alpha_i)$ são todos nulos. Portanto, cada um dos α_i ou são uma integral primeira racional ou constantes. Porém, se todos os α_i são constantes, então

$$\mathcal{N}_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \ldots + \alpha_k v_k = 0$$

é uma relação não trivial em x e y que não é possível. Assim, pelo menos um dos α_i será uma integral primeira racional do campo de vetores X. $\square$

O seguinte resultado, provado em (26) e (7), dá uma cota para o n´mero máximo de hipersuperfíces invariantes de um grau fixado.

Teorema 2.4. *Seja X um campo polinomial em $\mathbb{C}^n$ de grau d. Suponha que X não admite integral primeira racional. Então o número de hipersuperfícies irredutíveis invariantes por X, de grau k, é no máximo*

$$\binom{n+k}{k} + \frac{1}{k}\binom{\binom{n+k}{k}}{2}(d-1).$$

Em particular, se $k = 1$ vale

$$\binom{n+1}{2}(d-1) + n + 1. \tag{2.2.7}$$

Demonstração. Como X não admite integral primeira racional segue do teorema 2.3 que $\mathcal{E}_k(X)$ é um polinômio não identicamente nulo e pela proposição 2.3 todas as hipersuperfíceis ,de grau no máximo k, estão contidas em $\{\mathcal{E}_k(X) = 0\}$.

Se $f_1, \ldots, f_N$ são polinômios irredutíveis, de grau no máximo k, definindo as hipersuperfíces invariantes por X. Então, podemos escrever

$$\mathcal{E}_k(X) = (f_1 \ldots f_N)R. \tag{2.2.8}$$

Agora, calculando o grau temos

$$\deg(f_1 \ldots f_N) = \sum_{i=1}^{N} \deg(f_i) = kN.$$

Por (2.2.8) vale

$$\deg(\mathcal{E}_k(X)) \geq kN \tag{2.2.9}$$

Temos que

$$\deg(\mathcal{E}_k(X)) = Kk + (d-1)\binom{K}{2},$$

onde $K = \binom{n+k}{k}$. Portanto

$$N \leq K + \frac{(d-1)}{k}\binom{K}{2}.$$

□

Exemplo 2.2. *A cota do Teorema 2.4, no caso em que $k = 1$ é otimal. De fato, o campo de vetores definido por*

$$X = \sum_{i=1}^{n} z_i \left(z_i^{d-1} - 1\right) \frac{\partial}{\partial z_i}. \tag{2.2.10}$$

deixa invariante as $n + \binom{n}{2}(d-1)$ hipersuperfícies

$$z_j = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad z_i^{d-1} - z_j^{d-1} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n. \tag{2.2.11}$$

2.3 Exercícios

1 . Demonstre a Proposição 2.2.

2 . Mostre que a hipersuperfície extactica $\{\mathcal{E}_r(X) = 0\}$ independe das escolhas de base para $\mathbb{C}_r[z]$.

3 . Mostre que o o campo definido por

$$X = \sum_{i=1}^{n} z_i \left(z_i^{d-1} - 1\right) \frac{\partial}{\partial z_i}. \tag{2.3.12}$$

deixa invariante as $n + \binom{n}{2}(d-1)$ hipersuperfícies

$$z_j = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad z_i^{d-1} - z_j^{d-1} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n. \tag{2.3.13}$$

Capítulo 3

O Problema de Poincaré para hipersuperfícies invariantes

Neste capítulo vamos considerar o problema de limitar o grau de uma hipersuperfície algébrica invariante em termos do grau do campo. Tal problema é conhecido atualmente como problema de Poincaré. Para isso, vamos demonstrar um teorema de caracterização de Zarisk-Esteves para campos polinomiais homogêneos que admitem uma hipersuperfície algébrica homogênea não-singular fora de $0 \in \mathbb{C}^n$ Em particular, mostraremos uma cota otimal, reobtendo um resultado de M. Soares (31).

3.1 Complexo Koszul

Considere $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[z]$ e denotemos por $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Vamos construir o complexo Koszul associado f. Seja $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ base canônica para $\mathbb{C}^n$ e definamos E_k espaço vetorial de k-vetores diferenciais com coeficientes polinomiais e com base $e_J = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}$, onde $J = (j_1, \ldots, j_k) \subset (1, \ldots, n)$. Note que $E_0 = \mathbb{C}[z]$. Definimos as seguintes aplicações

$$d_k : E_k \to E_{k-1}$$

tais que

$$d_k(e_J)=\sum_{v=1}^{k}(-1)^{v-1}f_{jv}e_{j_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{e_{j_v}}\wedge\cdots\wedge e_{j_k}.$$

Para $k=1$, coloquemos $d(e_i)=f_i$, para $i\in\{j_1,\ldots,j_k\}$.

Proposição 3.1. *Para todo k, vale $Im(d_k)\subseteq Ker(d_{k-1})$.*

Definição 3.1. *Definimos o* ***complexo Koszul*** *associado ao conjunto de polinômios $f_1,\ldots,f_n\in\mathbb{C}[z]$ e o denotaremos por $\mathcal{K}(f)$ como sendo a sequência de aplicações*

$$\mathcal{K}(f):\cdots\longrightarrow E_k\xrightarrow{d_k}E_{k-1}\xrightarrow{d_{k-1}}\cdots\xrightarrow{d_2}E_1\xrightarrow{d_1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}\longrightarrow 0.$$

Dizemos que o complexo de Koszul é **exato** se $Ker(d_{k-1})=Im(d_k)$, para todo k.

Como podemos identificar e_i com os campos constantes $\frac{\partial}{\partial z_i}$, o mapa acima pode ser reescrito como

$$d_k(\partial_J)=\sum_{v=1}^{k}(-1)^{v-1}f_{jv}\frac{\partial}{\partial z_{j_1}}\wedge\cdots\wedge\widehat{\frac{\partial}{\partial z_{j_v}}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial z_{j_k}}.$$

Para nosso propósito os mapas

$$d_2\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\wedge\frac{\partial}{\partial z_j}\right)=f_i\frac{\partial}{\partial z_j}-f_j\frac{\partial}{\partial z_i},\tag{3.1.1}$$

e $d_1(\frac{\partial}{\partial z_j})=f_j$, irão desempenhar um papel fundamental. De fato, suponha que $X\in E_1=\mathbb{C}[z]^{\oplus n}$ é tal que $d_1(X)=0$, ou seja, $X\in Ker(d_0)$. Se a sequência de Koszul for exata, então $X\in Ker(d_0)=Im(d_1)$. Isto implica que podemos escrever

$$X=\sum_{i<j}P_{i,j}\left(f_i\frac{\partial}{\partial z_j}-f_j\frac{\partial}{\partial z_i}\right),\tag{3.1.2}$$

onde $P_{i,j}\in\mathbb{C}[z]$.

O próximo teorema será fundamental para a demonstração do teorema principal deste capítulo.

Teorema 3.1. *(12, Apêndice A2.6) Se $\{f_1=\cdots=f_0=0\}=\{0\}$, então o complexo de Koszul $\mathcal{K}(f)$ associado a $(f_1,\ldots,f_n)$ é exato.*

3.2 Demonstração de Zarisk-Esteves

Seja $V = \{f = 0\}$ uma hipersuperfície algébrica homogênea, de grau k, não-singular fora da origem $0 \in \mathbb{C}^n$. Um campo X deixa V invariante se, e somente

$$P_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \cdots + P_n \frac{\partial f}{\partial z_n} = hf \tag{3.2.3}$$

para algum $h \in \mathbb{C}[z]$. Podemos sempre construir campos que deixam V invariante, dado por

$$\sum_{i<j} P_{i,j} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial f}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial z_i} \right) + \frac{h}{k} \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \tag{3.2.4}$$

com $P_{i,j}, h \in \mathbb{C}[z]$. O seguinte Teorema, devido a Eduardo Esteves, prova que vale a recíproca.

Teorema 3.2 (Zarisk-Esteves)**.** *Seja $V = \{f = 0\}$ uma hipersuperfície algébrica homogênea, de grau k, não-singular fora da origem $0 \in \mathbb{C}^n$. Se X é um campo homogêneo que deixa V invariante, então*

$$X = \sum_{i<j} P_{i,j} \left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial F}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial z_i} \right) + \frac{h}{k} \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i},$$

onde $P_{i,j}, h \in \mathbb{C}[z]$ são polinômios homogêneos.

Demonstração. Temos que $X = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial}{\partial z_i}$, onde $P_i \in \mathbb{C}[z]$ são polinoômios homogêneos. Pela fórmula de Euler temos

$$kf = z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \cdots + z_n \frac{\partial f}{\partial z_n}. \tag{3.2.5}$$

Por outro lado, pela invariância temos

$$hf = P_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \cdots + P_n \frac{\partial f}{\partial z_n} \tag{3.2.6}$$

para algum polinômio homogêneo $h \in \mathbb{C}[z]$. Subtraindo as equações (3.2.5) e (3.2.6) e multiplicando por h obtemos a relação polinomial

$$G_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \cdots + G_n \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0, \tag{3.2.7}$$

where $G_i := P_i - (h/k) z_i$ para $i = 1, \ldots, n$. A identidade (3.2.7) diz que o campo

$$X' = X - \frac{h}{k} \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

satisfaz $d_0(X') = 0$, ou seja, $X' \in Ker(d_0)$, onde d_0 é o opertador do complexo de Koszul associado a $(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial z_n})$. Como o conjunto singular da hipersuperfície , por hipótese, consiste de

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial z_1} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0 \right\} = \{0\}$$

segue do teorema 3.1 que o complexo de Koszul associado é exato. Portanto

$$X' = X - \frac{h}{k} \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i} = \sum_{i<j} P_{i,j} \left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial F}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial z_i} \right)$$

com $P_{i,j}, \in \mathbb{C}[z]$ polinômios homogêneos. $\square$

Teorema 3.3. *Seja $V = \{f = 0\}$ uma hipersuperfície algébrica homogênea, de grau k, não-singular fora da origem $0 \in \mathbb{C}^n$. Seja X é um campo homogêneo, de grau d, que deixa V invariante. Suponha $Sing(X)$ não contém uma hipersuperfície, então $k \leq d + 1$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2 o campo X é da forma

$$X = \sum_{i<j} P_{i,j} \left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial F}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial z_i} \right) + \frac{h}{k} \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i},$$

onde $P_{i,j}, h \in \mathbb{C}[z]$ são polinômios homogêneos.

Como $X \neq 0$, temos que $P_{i,j} \neq 0$ para certos i, j. Caso contrário, teríamos

$$X = \frac{h}{k} \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Que implicaria que $\{h = 0\} \subset Sing(X)$. Isso contradiz a hipótese que $Sing(X)$ não contém uma hipersuperfície.

Se o campo X tem grau m, vale que $\deg P_{i,j} = m - d + 1$. Por outro lado, como $\deg P_{i,j} \geq 0$, conclumos que $d \leq m + 1$. $\square$

3.3 Exercícios

Considere campo polinomial

$$X_{(p,q)} = px \frac{\partial}{\partial x} + qy \frac{\partial}{\partial y}$$

com $p \neq q$ inteiros positivos. Mostre que a curva singular $C = \{y^p - x^q = 0\}$ é invariante por X. Portanto, $\{X_{(p,q)}\}$ exibe uma família infinita de campos de grau um com curvas invariantes singulares de grau arbitrário maior que um.

Capítulo 4

Hipersuperfícies invariantes por endomorfismos polinomiais

S. Cantat em (3) provou uma versão dinâmica discreta do teorema de Darboux-Jouanolou-Ghys. Mais precisamente, ele prova que um endomorfismo holomorfo de uma variedade complexa compacta preserva uma fibração meromorfa não trivial se, e somente se, possui infinitas hipersuperfícies totalmente invariantes. Neste capítulo vamos apresentar uma adaptação direta desse teorema para endomorfismos polinomiais em $\mathbb{C}^n$. Tal adaptação pode ser encontrada na dissertação de mestrado de Vinicius Reis.

Vamos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 4.1. *Seja f um endomorfismo polinomial de $\mathbb{C}^n$. Se existem k hipersuperfícies totalmente invariantes com*

$$k > n,$$

então existem uma função racional não constante Φ e um número complexo não nulo α tal que $\Phi \circ f = \alpha\Phi$.

O endomorfismo f preserva o pencil de hipersuperfícies induzido pela função racional Φ. De fato, escreva $\Phi = P/Q$ e considere o pencil de hipersuperfícies induzido por Φ dado por

$$V_\lambda = \{P - \lambda Q = 0\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$$

Dado $z \in V_\lambda$, então

$$\Phi(z) = P(z)/Q(z) = \lambda \text{ apara todo } z \in V_\lambda$$

Como $\Phi \circ f = \alpha\Phi$, com $\alpha \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned} (\Phi \circ f)(z) &= (\alpha\Phi)(z) \\ &= \alpha\Phi(z) \\ &= \alpha\frac{P(z)}{Q(z)} \\ &= \alpha\lambda. \end{aligned}$$

Daí, concluimos que $\Phi(f(z)) \in V_{\alpha\lambda}$. Isto mostra que $f(V_\lambda) \subseteq V_{\alpha\lambda}$. Portanto, os níveis da função racional Φ são preservadas por f.

4.1 Hipersuperfícies Totalmente Invariantes

Definição 4.1. *Seja $V(f)$ uma hipersuperfície com $f \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$, dizemos que V é totalmente invariante por um endomorfismo polinomial $G : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ se $G^{-1}(V) = V$.*

Proposição 4.1. *Seja V uma hipersuperfície totalmente invariante por um endomorfismo $G : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, então $G(V) = V$.*

Demonstração. Mostremos que $G^{-1}(V) = V \Rightarrow G(V) = V$. Vamos mostrar que $G(V) \subset V$. De fato, seja $b \in G(V)$, então existe $a \in V$ tal que $G(a) = b$. Como $G^{-1}(V) = V$, temos $G(a) \in V$, ou seja, $b \in V$. O caso $G(V) \supset V$ segue de forma análoga. $\square$

Definição 4.2. *Uma aplicação contínua $f : M \to N$ é dita **própria** quando a imagem inversa $f^{-1}(K)$ de todo compacto $K \subset N$ é um conjunto compacto.*

Dizemos que um endomorfismo $G : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ preserva uma função racional não constante Φ se existe um número complexo não nulo α tal que $\Phi \circ f = \alpha\Phi$.

Teorema 4.2. (Teorema da aplicação própria). *Seja $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma aplicação polinomial e própria. Se $V \subset U$ é uma variedade algébrica irredutível então $f(V)$ é uma variedade algébrica irredutível.*

Demonstração. Ver (17) pag.34. □

Seja $V = V_1 \cup \ldots \cup V_r$ uma hipersuperfície, com V_j irredutivel, para todo $j = 1, \ldots, r$. Se G é um endomorfismo polinomial, tal que $G(V) = V$. O lema abaixo nos garantirá que para $i, j = 1, \ldots, r$ temos $G(V_i) = V_j$. Isto é, G envia componentes irredutíveis de V em componentes irredutíveis de V.

Lema 4.1. *Toda aplicação polinomial homogênea é própria.*

Demonstração. Mostremos primeiramente que dada a aplicação polinomial $p = (p_1, ..., p_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, p_i homogêneo de mesmo grau d, existem m e n tais que $n\|z\|^d \leq \|p(z)\| \leq m\|z\|^d$. Considere

$$m = \sup\{\|p(z)\|; \|z\| = 1\} \text{ e } n = \inf\{\|p(z)\|; \|z\| = 1\}.$$

Note que $\frac{z}{\|z\|} \in S(0,1)$ esfera centrada na origem de raio 1. Daí, usando a homogeneidade de p resulta

$$n\|z\|^d \leq \|p(z)\| = \|z\|^d \|p(\tfrac{z}{\|z\|})\| \leq m\|z\|^d.$$

Verifiquemos com isso que p é uma aplicação própria. Seja K um conjunto compacto, e defina $L = p^{-1}(K)$. Suponha por absurdo que L não é compacto. Temos que L é fechado, pois p é contínua. Resta mostrar que L é limitado. Seja

$$z_0 \in L \text{ tal que } \|z_0\| > \sup_{z \in K} \left(\sqrt[d]{\tfrac{\|z\|+1}{m}} \right),$$

como $z_0 \in p^{-1}(K)$ temos $p(z_0) \in K$. Ainda

$$\left[\sup_{z \in K} \sqrt[d]{\tfrac{\|z\|+1}{m}} \right]^d < \|z_0\|^d \Rightarrow \sup(\|z\| + 1) < \|z_0\|^d m \leq |p(z_0)|.$$

Absurdo, pois $z_0 \in p^{-1}(K)$. □

Considere G um endomorfismo polinomial em $\mathbb{C}^n$. Sejam $V \subset \mathbb{C}^n$ uma hipersuperfície totalmente invariante e $V_1, ..., V_r$ suas componentes irredutíveis. Como V é uma hipersuperfície totalmente invariante, segue da proposição 4.1 que

$$G(V) = V.$$

Portanto,

$$G(V_1 \cup ... \cup V_r) = V_1 \cup ... \cup V_r.$$

Utilizando o teorema da aplicação própria temos que $G(V_i) = V_j$, para $i, j \in \{1, ..., r\}$.

Proposição 4.2. *Se $V(f)$ é uma hipersuperfície irredutível totalmente invariante, então*

$$f \circ G = \lambda f^k, \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Demonstração. Por definição

$$I(V) = \{g \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n] : g(z) = 0 \quad \forall z \in V\}.$$

Dado $p \in V$, como V é totalmente invariante $(f \circ G)(p) = f(G(p)) = 0$, ou seja, $(f \circ G) \in I(V)$. Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert temos

$$(f \circ G) \in I(V) = \sqrt{I} = \langle f \rangle.$$

Como $(f \circ G) \in I(V) = \sqrt{I} = \langle f \rangle$ segue que $f \circ G = hf$. Pelo fato de $G^{-1}(V) = V$, teremos que hf se anula exatamente em V, e pela irredutibilidade de V segue que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f \circ G = \lambda f^k$. □

O próxido teorema de Fornæss e Sibony (14) nos diz que hipersuperficies totalmente invariantes por endomorfismo $G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ homogêneos, de grau maior ou igual a dois e com $G^{-1}(0) = \{0\}$, estão contidas no conjunto de pontos críticos de G. Além disso, diz que o grau de uma hipersuperficie invariante não ultrapassa n.

Teorema 4.3 (Fornaess-Sibony). *Seja $V(f)$ uma hipersuperfície irredutível totalmente invariante por um endomorfismo polinomial homogêneo $G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ de grau ≥ 2 e $G^{-1}(0) = \{0\}$. Então:*

i) $V(f)$ está contida no conjunto de pontos críticos de G.

ii) $\deg(V(f)) \leq n$.

Demonstração. Seja $p \in V(f)$. Agora, derivando a identidade $f \circ G = \lambda f^k$ obtemos

$$D(f \circ G)(p) = Df(G(p)) \cdot DG(p) = \lambda k f^{k-1}(p) Df(p) = 0.$$

Portanto $\dim \ker(DG(p)) > 0$, em particular $\det(DG(p)) = 0$. Isto mostra que $V(f^{k-1}) \subset V(\det(DG))$. Então f^{k-1} é um fator de $\det(DG(p))$. O resultado segue comparando os graus de f^{k-1} e de $\det(DG(p))$ e usando que o grau de $\det(DG)$ é $(k-1)n$.

□

Proposição 4.3. *Sejam $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ polinômios irredutíveis cujo conjunto de zeros definem uma hipersuperfície totalmente invariante por um endomorfismo polinomial $G : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$. Então*

$$G^* \frac{df_i}{f_i} = r_i \frac{df_j}{f_j},$$

onde $j = k(i)$, k é uma permutação dos elementos $\{1, ..., r\}$ e $r_i \in \mathbb{N}$ para todo $i = 1, ..., r$.

Demonstração. Como $G(V_i) = V_{k(i)}$, segue da proposição 4.2 que

$$f_i \circ G = \lambda_i f_{k(i)}^{r_i}, \ \lambda_i \in \mathbb{C}^*.$$

Utilizando a propriedade do pullback $G^* d = dG^*$ segue

$$d(f_i \circ G) = d(\lambda_i f_{k(i)}^{r_i}) = \lambda_i r_i f_{k(i)}^{r_i - 1} df_{k(i)}.$$

Logo

$$\frac{d(f_i \circ G)}{f_i \circ G} = \frac{d(\lambda_i f_{k(i)}^{r_i})}{\lambda_i f_{k(i)}^{r_i}} = \frac{\lambda_i r_i f_{k(i)}^{r_i - 1} df_{k(i)}}{\lambda_i f_{k(i)}^{r_i}} = \frac{r_i df_{k(i)}}{f_{k(i)}} \Leftrightarrow G^* \frac{df_i}{f_i} = r_i \frac{df_{k(i)}}{f_{k(i)}}$$

□

Lema 4.2. *Sejam $f_1, ..., f_r$ polinômios irredutíveis. Então as 1-formas logarítmicas df_i / f_i são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Com efeito, caso contrádio ter´amos uma relação

$$\frac{df_1}{f_1} = \lambda_1 \frac{df_2}{f_2} + \cdots \lambda_r \frac{df_r}{f_r},$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ são números complexos nem todos nulos. Contradição, pois o conjuntos de pólos de df_1/f_1 e $\lambda_1(df_2/f_2) + \cdots \lambda_r(df_r/f_r)$ são difeferentes.

□

Considere o espaço vetorial $E = \langle df_i/f_i, \ i = 1, ..., r\rangle_{\mathbb{C}}$. O Lema 4.2 garante que o espaço E tem dimensão r. Pela proposição 4.3 temos

$$\begin{aligned} G^* : E &\longrightarrow E \\ \frac{df_i}{f_i} &\longmapsto r_i \frac{df_j}{f_j}. \end{aligned}$$

Temos pela proposição 4.3 que

$$G^* \frac{df_j}{f_j} = r_i \frac{df_i}{f_i}.$$

onde $k : \{1, ..., r\} \to \{1, ..., r\}$ é a permutação com $k(j) = i$. Isto nos diz que o operador linear tem representação matricial

$$[G^*] = [G_{ij}] = \begin{cases} r_i, & j = k(i); \\ \\ 0, & j \neq k(i). \end{cases}$$

Daí concluimos que $[G^*]$ é uma matriz permutação , em particular diagonalizável.

4.2 Demonstração do Teorema de Cantat para Endomorfismos polinomiais

Agora estamos em condições de provar o teorema principal deste capítulo.

Teorema 4.4. *Seja f um endomorfismo polinomial de $\mathbb{C}^n$. Se existem k hipersuperfícies totalmente invariantes com*

$$k > n,$$

então existem uma função racional não constante Φ e um número complexo não nulo α tal que $\Phi \circ f = \alpha\Phi$.

Demonstração. Defina a 1-forma racional $\eta_i = df_i/f_i$ com $i = 1, ..., k$. Como f^* é diagonalizá vel, temos

$$f^* \eta_i = \mu_i \eta_i, i = 1, ..., k, \tag{4.2.1}$$

onde $\mu_i \in \mathbb{C}^*$.

Se f possui $k > n$ hipersuperfícies totalmente invariantes, então η_i são linearmente dependentes sobre o corpo de funções racionais em $\mathbb{C}^n$.

De fato, por ser $k > n$ então $\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k = 0$. Como $\eta_1, \ldots, \eta_k$ são 1-formas lineares sobre $\mathbb{C}(z_1, \ldots, z_n)$ e $\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_k = 0$, então elas são linearmente dependentes.

Suponha que o espaÃo vetorial E sobre $\mathbb{C}(z_1, ..., z_n)$, gerado por $\eta_1, ..., \eta_m$ tenha dimensão igual a m. Temos então que

$$\eta_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} R_i \eta_i, R_i \in \mathbb{C}(z_1, ..., z_n). \tag{4.2.2}$$

Pelo menos um dos $R_{i's}$ é não constante pois pelo Lema 4.2, as 1-formas $\eta_{i's}$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$.

Aplicando f^* na equação (4.2.2) e usando (4.2.1) segue

$$f^*\eta_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} f^*(R_i\eta_i) = \sum_{i=1}^{m}(R_i \circ f).f^*\eta_i = \sum_{i=1}^{m}(R_i \circ f).\mu_i\eta_i. \tag{4.2.3}$$

Por outro lado

$$f^*\eta_{m+1} = \mu_{m+1}\eta_{m+1}. \tag{4.2.4}$$

Note que $\mu_{m+1} \neq 0$. Caso contrá rio, teríamos

$$0 = \mu_{m+1}\eta_{m+1} = f^*\eta_1 = \sum_{i=1}^{m}(R_i \circ f).\mu_i\eta_i. \tag{4.2.5}$$

Isto contraria o fato de $\eta_1, \ldots, \eta_m$ serem linearmente independentes sobre $\mathbb{C}(z_1, \ldots, z_n)$, pois pelo menos um dos R_i é não constante. Daí,

$$\mu_{m+1}\eta_{m+1} = \sum_{i=1}^{m}(R_i \circ f).\mu_i\eta_i. \tag{4.2.6}$$

Como $\mu_{m+1} \neq 0$, segue, usando as equações (4.2.3) e (4.2.4)

$$\eta_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\mu_i}{\mu_{m+1}}\right)(R_i \circ f)\eta_i. \tag{4.2.7}$$

Subtraindo (4.2.2) de (4.2.7), temos

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} \left[\left(\frac{\mu_i}{\mu_{m+1}}\right)(R_i \circ f) - R_i\right]\eta_i = 0.$$

Utilizando independência linear dos $\eta_{i's}$ sobre $\mathbb{C}(z_1, ..., z_n)$ segue

$$\tfrac{\mu_i}{\mu_{m+1}}(R_i \circ f) = R_i.$$

Obtendo assim o resultado esperado pois pelo menos uma das funções racionais R_i é não constante. $\square$

4.3 Exercícios

1 . Mostre que toda matriz da forma

$$[G^*] = [G_{ij}] = \begin{cases} r_i, & j = k(i); \\ \\ 0, & j \neq k(i). \end{cases}$$

é diagonalizável.

2 . Considere a função racional em $\mathbb{C}^3$ dada por $R(x, y, z) = x/y$. O níveis da função racional R é o pencil de planos

$$\{x - \lambda y = 0\}.$$

Mostre que todo endomorfismo da forma $G(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), S(x, y, z))$, onde P, Q, S são polinomios homogêneos de mesmo grau, preservam $R(x, y, z) = x/y$.

3 . Considere o endomorfismo

$$\begin{array}{rcl} G : \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ \\ (z_1, \ldots, z_n) & \longmapsto & (z_1^d, \ldots, z_n^d). \end{array}$$

Mostre que os hiperplanos $\{z_i = 0\}$ são totalmente invariantes por G e que G não preserva uma função racional da forma P/Q, onde P e Q são homogêneos de mesmo grau.

4 . Seja $G = (g_1, \ldots, g_n) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ endomorfismo polinomial dado por

$$g_i(z_1, \ldots, z_n) = z_1^d + \lambda_j z_2^d + \cdots + \lambda_j^n z_n^d, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

com $\lambda_j \in \mathbb{C}$ satisfazendo $\prod_{1 \leq r < s \leq n} (\lambda_r - \lambda_s) \neq 0$. Mostre que o conjunto de pontos críticos de G consiste de $\{0\}$. Aplique o Teorema 4.3 para concluir que G não admite nenhuma hipersuperfície totalmente invariante.

Bibliografia

[1] R. Bott; L. W . Tu. *Diferential Forms in Algebraic Topology.* Springer-Verlag 1982.

[2] R. L. Bryant, S.S. Chern, R. B. Gardner, H. L. Goldschmidt, P.A. Griffiths. *Exterior Differential Systems* (Mathematical Sciences Research Institute Publications), 1991 Springer-Verlag.

[3] S. Cantat. *Invariant hypersurfaces in holomorphic dynamics.* Math. Res. Lett. 17 (2010), 833-841.

[4] D. Cerveau and A. Lins Neto, *Holomorphic foliations in* $\mathbb{P}^2$ *having an invariant algebraic curve*, Ann. Inst. Fourier 41 (1991), 883-903.

[5] M. Corrêa Jr; L. G. Maza, M. G. Soares, Hypersurfaces Invariant by Pfaff Equations. À aparecer em Communications in Contemporary Mathematics, 2014.

[6] M. Corrêa Jr ; L.G. Maza ; M. G. Soares. *Algebraic integrability of polynomial differential r-forms.* Journal of Pure and Applied Algebra (Print), v. 215, p. 2290-2294, 2011.

[7] M. Corrêa JR ; M. G. Soares. *Counting hypersurfaces invariant by one-dimensional complex foliations.* London Mathematical Society Lecture Note Series, v. 308, p. 104-113, 2010.

[8] M. Corrêa Jr. *Darboux-Jouanolou-Ghys integrability for one-dimensional foliations on toric varieties.* Bulletin des Sciences Mathématiques (Paris. 1885), p. 693-704, 2010.

[9] D. Cox; J. Little; D. O'shea. *Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.* Third edition. Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1991.

[10] G. Darboux, *Memoire sur les èquations differentielles algebriques du premier ordre et du premier degre.* (Melanges), Bull. Sci. Math. **2** (1878) 60-96, 123-144,151-200.

[11] V.A. Dobrovols'kii, N.V. Lokot' and J.M. Strelcyn, *Mikhail Nikolaevich Lagutinskii (1871-1915): un matématicien méconnu*, (French) [Mikhail Nikolaevich Lagutinskii (1871 1915): an unrecognized mathematician] Historia Math. 25 (1998), 245264.

[12] D. Eisenbud. *Commutative Algebra. With a View Toward Algebraic Geometry,* GTM 150, Springer Verlag (1995).

[13] E. Esteves, *The Castelnuovo-Mumford regularity of an integral variety of a vector field on projective space.* Math. Res. Letters 9 (2002), 1-15.

[14] J. E. Fornæss and N. Sibony, *Complex dynamics in higher dimension I*, Asterisque 222 (1994), 201-231.

[15] E, Ghys, *Propos d'un theoreme de J.-P. Jouanolou concernant les feuilles fermees des feuilletages holomorphes.* Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 49 (2000), no. 1, 175-180.

[16] C. Godbillon. *Geometrie Differentielle et Mecanique Analytique.* Hermann, Paris (1969).

[17] P. Griffiths; J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley Classics Library. Wiley Interscience (1978).

[18] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer. 1977.

[19] E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley Sons, 1976.

[20] J- P. Jouanolou. *Equations de Pfaff algebriques*, Lect. Notes in Math., 708, Springer-Verlag (1979).

[21] J-P. Jouanolou *Hypersurfaces solutions d'une equation de Pfaff analytique.* Math. Ann. 232 (1978) no 3, 239-245.

[22] J. Llibre, X. Zhang. *Rational first integral in Darboux theory of integrability in* $\mathbb{C}^n$. Bull. Sci. Math. 2010.

[23] J. Lipman, *Free derivation modules on algebraic varieties*, Amer. J. Math. 87 (1965), 874-898.

[24] J. V. Pereira. *Integrabilidade de Equações Diferenciais no Plano Complexo.* LIMA: IMCA - Instituto de Matematicas y Ciencias Afines, 2001.

[25] J. V. Pereira; C. Christopher ; J. Llibre. *Multiplicity of Invariant Algebraic Curves in Polynomial Vector Fields.* Pacific Journal of Mathematics, v. 229, p. 63-117, 2007.

[26] J. V. Pereira, *Vector Fields, Invariant Varieties and Linear Systems.* Annales de LÍnstitut Fourier **51**, no.5 (2001), 1385-1405.

[27] P. Painlevé, *Sur les integrales algebrique des equations differentielles du premier ordre* and *Memoire sur les équations differentielles du premier ordre*, Oeuvres de Paul Painleve; Tome II, Centre National de la Recherche Scientifique, **15**, quai Anatole-France, 75700, Paris, 1974.

[28] H. Poincaré, *Sur l'integration algebrique des equations differentielles du premier order et du premier degre.* Rend. Circ Mat Palermo,**5** (1891), 161-191.

[29] V. dos Reis. *Hipersuperfícies Invariantes em Dinâmica Complexa.* Dissertao de Mestrado em Matemática-UFV, 2012.

[30] M. Sebastiani. *Introdução Geometria Analítica Complexa.* Rio de Janeiro: IMPA, 2004. ISBN 85-244-0218-0.

[31] M. G. Soares, *The Poincaré problem for hypersurfaces invariant by one-dimensional foliations.* Inventiones Mathematicae, Alemanha, v. **128**, p. 495-500, 1997.

[32] L. W. Tu. *An introduction to manifolds.* 2ed. Springer, 2010.