Minicurso – Colóquio de Matemática da Região Norte 2014

Comitê Científico

Esta é mais uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática para os minicursos ministrados nos Colóquios.

Os autores que submeterem propostas de minicursos devem estar cientes de que o texto deve ser preparado em **Latex (compatível com o Miktex versão 2.7), as figuras em eps**.

O texto deve ser redigido de forma clara e recomendamos a inclusão de **exercícios** para a verificação de aprendizagem, ao final de cada capítulo.

Veja outras publicações da SBM, na livraria virutal que se encontra na página

http://www.loja.sbm.org.br/

Sociedade Brasileira de Matemática

2014

O Grau Topológico de Brouwer e o Teorema de Poincaré-Miranda

José Marcos da Silva
josemarcos08@yahoo.com.br

Núcleo de Formação Docente - NDF
Centro Acadêmico do Agreste - CAA
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Sociedade Brasileira de Matemática

Rio de Janeiro - RJ, Brasil
2014

Coordenação Editorial:

Flávia Morgana de O. Jacinto

Editora: SBM

Impresso na Gráfica:

Capa: ? ? ?

Patrocínio: Superitendência da Zona Franca de Manaus (SUFRAMA)

Catalogação elaborada pela Biblioteca ???
Bibliotecária: ????

Silva, José Marcos da
O Grau Topológico de Brouwer e o Teorema de Poincaré-Miranda – Rio de Janeiro, RJ : SBM, 2014, ?? p., 20.5 cm - (Minicurso Colóquio CO 2014; v. ??)

ISBN ????-????

1. Grau Topológico 2. Teorema de Miranda 3. Teorema do Valor Intermediário
I. Silva, José Marcos da. II. Título. III. Série

CDD - 51

Dedico estas notas à minha esposa, Carla Araújo, por sua dedicação e paciência.

Agradecimentos

Neste momento, quero agradecer a todos que contribuíram e que contribuem na minha formação, desde as séries iniciais até os dias atuais. Entre estes estão minha família, meus amigos e meus professores. Em especial, agradeço a minha esposa Carla Araújo, a qual esteve comigo nesses últimos anos e me ajudou na superação dos obstáculos e desafios; ao professor Daniel, ao qual sou eternamente grato, por ter me acompanhado durante os anos finais da graduação e todo o mestrado e por ter dado as orientações necessárias para o meu crescimento como estudante, matemático e professor; aos colegas de trabalho nos locais dos quais fui professor: IFPB, UEPB, UFCG e Escola Estadual de Bodocongó; aos colegas da graduação e do mestrado, em especial a Fabrício; a todos os meus alunos, os quais serviram de inspiração para que eu não desistisse e continuasse meus estudos.

Agradeço ainda a UFPE, da qual sou professor, pelo apoio e aos organizadores do colóquio por terem confiado no meu trabalho.

Por fim, não poderia esquecer de agradecer a DEUS por ter me dado força, sabedoria e paciência para que eu conseguisse conquistar meus objetivos!

...

A Matemática, quando a compreendemos bem, possui não somente a verdade, mas também a suprema beleza.

Bertrand Russel.

...

Conteúdo

Prefácio

Ao escrever o presente livro, meu objetivo é apresentar uma ferramenta que pode ser muito útil, principalmente para aqueles que fazem estudos na área de Equações Diferenciais: o Teorema de Poincaré-Miranda.

Quando eu estava elaborando a dissertação do mestrado, em um determinado momento, precisei utilizar tal ferramenta. Pesquisando em artigos, encontrei uma demonstração desse teorema utilizando a Teoria do Grau. Encantado por encontrar um resultado tão interessante e, até então, desconhecido para mim, dediquei uma pequena parte do meu trabalho de conclusão do mestrado para essa demonstração.

No entanto, havia sempre uma inquietação em compartilhar tal conhecimento e esperei um momento para fazer isto. O Colóquio de Matemática da Região Norte foi a oportunidade que eu queria.

Apresentar toda a teoria utilizada seria algo quase impossível em virtude da limitação no tamanho do livro. Além disso, fugiria do foco principal do trabalho. Por isso, a lógica usada foi: apresentar todas as ferramentas utilizadas no capítulo e acrescentar nos exercícios (desse mesmo capítulo) mais definições e resultados desse assunto que seriam usados nos capítulos seguintes.

Dividi estas notas em quatro capítulos. Começamos, no Capítulo 1, com as definições e os resultados básicos de sequência, topologia e aplicações contínuas no espaço euclidiano n-dimensional. Devido a sua intensa recorrência no estudo de Teoria do Grau, dedicamos um capítulo - Capítulo 2 - para o estudo das aplicações diferenciáveis, destacando, entre outros teoremas, o Teorema da Aplicação Inversa e o Teorema de Sard. No Capítulo 3, construímos a definição de grau topológico, começando com a definição para aplicações de classe C^1, depois para aplicações de classe C^2 e, por fim, para as aplicações contínuas. Concluímos este trabalho com o Capítulo 4, o qual trata do Teorema de Poincaré-Miranda.

Os pré-requisitos para o bom entendimento deste texto se restringem, praticamente, a conhecimentos básicos de Álgebra Linear.

Entre as principais referências utilizadas, as quais aparecem na Bibliografia, destado a ”coleção”clássica de Elon Lages Lima sobre Análise (usada nos Capítulos 1 e 2) e a dissertação de mestrado de Orlando Batista de Almeida (Capítulo 3).

Desejo que este material seja de grande utilidade!

Campina Grande, 13/09/2014.

José Marcos da Silva

Capítulo 1

Definições e Resultados Preliminares

1.1 O Espaço Euclidiano n-Dimensional

Definição 1.1. *Dado o número natural n, definimos o espaço euclidiano n-dimensional, denotado por $\mathbb{R}^n$, como sendo*

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n); x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$ e α um número real. Definimos a soma $x + y$ e o produto αx pondo

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

e

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n).$$

O conjunto $\mathbb{R}^n$ munido das operações definidas acima formam um espaço vetorial real, cujo elemento neutro para a adição é $0 = (0, 0, ..., 0)$ e o simétrico de $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ é $-x = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$.

Definição 1.2. *Seja E um espaço vetorial (real). Uma norma em E é uma aplicação $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições, para quaisquer $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:*
(N1) $\|x\| \geq 0$ *e* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$*;*
(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$*;*
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Chamaremos de espaço normado um espaço vetorial munido de uma norma.

Em $\mathbb{R}^n$, definamos as aplicações $\|.\|_E : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\|.\|_M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\|.\|_S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo:

$$\|x\|_E = \sum_{i=1}^{n} \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|x\|_M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$$

e

$$\|x\|_S = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|,$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Então, $\|.\|_E$, $\|.\|_M$ e $\|.\|_S$ são normas em $\mathbb{R}^n$, as quais são chamadas, respectivamente, norma euclidiana , norma do máximo e norma da soma . Além disso, é fácil verificar que:

$$\|x\|_M \leq \|x\|_E \leq \|x\|_S \leq n\|x\|_M.$$

Na maioria dos casos, em $\mathbb{R}^n$, usaremos a norma euclidiana. Quando formos utilizar a norma do máximo ou a da soma, deixaremos explícito.

A partir da norma, podemos definir bolas e conjuntos limitados como segue. Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$.

Definição 1.3. *Chamamos de bola aberta de centro a e raio r, a qual denotamos por $B(a, r)$, o conjunto:*

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| < r\}.$$

De maneira análoga, definimos a bola fechada de centro a e raio r, denotada por $B[a, r]$, como sendo o conjunto:

$$B[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| \leq r\}.$$

Por sua vez, a esfera de centro a e raio r, denotada por $S[a, r]$, é o conjunto

$$S[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| = r\}.$$

Definição 1.4. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito limitado quando existe um número real C tal que*

$$\|x\| \leq C, \forall x \in X.$$

Claramente, se X é um conjunto limitado e $Y \subset X$, então Y também é limitado.

Definição 1.5. *Um produto interno em um espaço vetorial E é uma aplicação $<,>$: $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições, para quaisquer $x, y, z \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:*
(PI1) $< x, x > \ \geq \ 0$ *e* $< x, x > \ = \ 0 \Leftrightarrow x = 0$*;*
(PI2) $< x, y > \ = \ < y, x >$*;*
(PI3) $< x + y, z > \ = \ < x, z > + < y, z >$*;*
(PI4) $< \alpha x, y > \ = \ \alpha < x, y >$*.*

1.2 Sequências em $\mathbb{R}^n$

Definição 1.6. *Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que associa a cada número natural k um elemento $x(k) \in \mathbb{R}^n$, o qual será denotado por x_k e chamado k-ésimo termo da sequência.*

As notações para uma sequência cujo k-ésimo termo é x_k são (x_k), $(x_1, x_2, ...)$ e $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Definição 1.7. *Uma subsequência de uma sequência (x_k) é a restrição dessa sequência a um subconjunto infinito $N' \subset \mathbb{N}$.*

Se $N' = \{k_1, k_2, ..., k_i, ...\}$ usamos, as seguintes notações para uma subsequência de (x_k): $(x_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$, $(x_{k_1}, x_{x_2}, ..., x_{k_i}, ...)$ ou simplesmente (x_{k_i}). Além disso, neste caso, iremos sempre assumir $k_1 < k_2 < ... < k_i < ....$

Dada uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$, para cada k, podemos escrever $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kn})$. Com esta notação, formamos n sequências $(x_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$, com $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Essas n sequências são chamadas coordenadas da sequência (x_k).

Definição 1.8. *Uma sequência (x_k) é limitada quando existe $C > 0$ tal que*

$$\|x_k\| \leq C, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definição 1.9. *Dada uma sequência $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que um ponto a é o limite de (x_k) (ou que (x_k) converge para o ponto a) quando dado um número real $\epsilon > 0$, podemos encontrar um número natural k_0 tal que*

$$k > k_0 \Rightarrow \|x_k - a\| < \epsilon.$$

Quando a é o limite de (x_k) usamos as notações: $\lim x_k = a$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = a$ ou $x_k \rightarrow a$.

Definição 1.10. *Dizemos que uma sequência (x_k) é convergente quando existe $a = \lim x_k$. Caso contrário, (x_k) é dita divergente .*

Teorema 1.1. *O limite de uma sequência convergente é único.*

Demonstração: Seja (x_k) uma sequência convergente em $\mathbb{R}^n$. Suponhamos que existam $a, b \in \mathbb{R}^n$ tais que $\lim x_k = a$ e $\lim x_k = b$. Dado $\epsilon > 0$, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$k > k_1 \Rightarrow \|x_k - a\| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$k > k_2 \Rightarrow \|x_k - b\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Escolhamos $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$. Desta forma, para $k > k_0$, temos

$$\|x_k - a\| < \tfrac{\epsilon}{2} \text{ e } \|x_k - b\| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Logo,

$$0 \leq \|a - b\| \leq \|x_k - a\| + \|x_k - b\| < \epsilon.$$

Sendo $\epsilon > 0$ arbitrário, podemos concluir que

$$\|a - b\| = 0$$

e consequentemente $a = b$.

■

Teorema 1.2. *Se (x_k) é uma sequência convergente de números reais tal que $x_k \leq C$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e para alguma constante C, então*

$$\lim x_k \leq C.$$

Demonstração: Seja $a = \lim x_k$. Se $a > C$, tomando $\epsilon = a - C > 0$, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > k_0 \Rightarrow a - \epsilon < x_k < a + \epsilon.$$

Em particular, para $k > k_0$,

$$x_k > a - \epsilon = a - (a - C) = C,$$

o que é um absurdo! Portanto, $\lim x_k = a \leq C$.

■

Um resultado muito conhecimento e que não demonstraremos aqui é o:

Teorema 1.3 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente.*

Definição 1.11. *Uma sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$ é dita de Cauchy quando dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$k, m > k_0 \Rightarrow \|x_k - x_m\| < \epsilon.$$

1.3 Noções Básicas de Topologia

1.3.1 Conjuntos Abertos

Definição 1.12. *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto quando, para todo $a \in A$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$B(a, \delta) \subset A.$$

Neste caso, estamos definindo conjunto aberto em relação ao espaço $\mathbb{R}^n$. No entanto, podemos definir conjunto aberto em relação a outro subconjunto do $\mathbb{R}^n$ da seguinte forma:

Definição 1.13. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Um conjunto $A \subset X$ diz-se aberto em X quando, para todo $a \in A$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$B(a, \delta) \cap X \subset A.$$

Teorema 1.4. *Uma bola aberta $B(a, r) \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto.*

Demonstração: Seja $x \in B(a, r)$. Então,

$$\|x - a\| < r.$$

Logo, $\delta = r - \|x - a\| > 0$. Mostremos que $B(x, \delta) \subset B(a, r)$. De fato, se $y \in B(x, \delta)$, temos

$$\|y - x\| < \delta.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|y - a\| &\leq \|y - x\| + \|x - a\| \\ &< \delta + \|x - a\| \\ &= r - \|x - a\| + \|x - a\| \\ &= r, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|y - a\| < r.$$

Assim, $y \in B(a, r)$. Portanto, $B(x, \delta) \subset B(a, r)$ e podemos concluir que $B(a, r)$ é aberto.

Exemplo 1.1. *Sejam $X = [0, 1]$ e $A = (0, 1]$. Então, A é aberto X.*

Teorema 1.5. *Os conjuntos $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ são abertos.*

Demonstração: É imediato que $\mathbb{R}^n$ é aberto. Já o conjunto vazio $\emptyset$ é aberto pois se não fosse, existiria um elemento $x \in \emptyset$ tal que, para todo $\delta > 0$,

$$B(x, \delta) \subset \emptyset.$$

Como tal x não existe, concluímos que $\emptyset$ é aberto. ■

Teorema 1.6. *Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de conjuntos abertos, então $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto.*

Demonstração: **Prova de (i)** Seja $a \in A$. Então, $a \in A_{\lambda_0}$ para algum $\lambda_0 \in L$. Mas, por hipótese, A_{λ_0} é aberto. Logo, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, r) \subset A_{\lambda_0}$. Daí, $B(a, r) \subset A$ e assim A é aberto. ■

1.3.2 Conjuntos Fechados

Definição 1.14. *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é dito fechado quando para $a \in \mathbb{R}^n$ e $(x_n) \subset F$ tais que $x_n \to a$, tem-se $a \in F$.*

Exemplo 1.2. *Sejam $b \in \mathbb{R}^n$ e $F = \{b\}$. Suponhamos $a \in \mathbb{R}^n$ e $(x_k) \subset F$ tal que $x_k \to a$. Como $x_k \in F$, para todo $k \in \mathbb{N}$, então $x_k = b, \forall k \in \mathbb{N}$. Daí, $\lim x_k = b$, donde, pelo Teorema 1.1, $a = b$. Assim, $a \in F$ e segue-se que F é aberto.*

Teorema 1.7. *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se, e somente se, seu complementar $A = \mathbb{R}^n - F$ é aberto.*

Demonstração: Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado. Provemos que $A = \mathbb{R}^n - F$ é aberto. De fato, suponhamos, por contradição, que A não é aberto. Então, existem $a \in A$ e $(x_k) \subset B(a, \frac{1}{k})$ tais que $x_k \notin A$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, $x_k \to a$ e $(x_k) \subset F$. Sendo F fechado, podemos afirmar que $a \in F$, o que é um absurdo, já que $a \in A$. Assim, $A = \mathbb{R}^n - F$ é aberto.

Reciprocamente, suponhamos que $A = \mathbb{R}^n - F$ é aberto e mostremos que F é fechado. Sejam $a \in \mathbb{R}^n$ e $(x_k) \subset F$ tal que $x_k \to a$. Afirmamos que $a \in F$. Com efeito, se $a \notin F$, então $a \in A$. Sendo A aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset A$. Porém, como $x_k \to a$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$x_k \in B(a, \delta), \forall k > k_0.$$

Logo, $x_k \in A$, para todo $k > k_0$, contradizendo o fato de que $(x_k) \subset F$. Assim, $a \in F$ e concluímos que F é fechado.

■

1.3.3 Conjuntos Compactos

Definição 1.15. *Um conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é dito compacto quando é fechado e limitado.*

Teorema 1.8. *Sejam K_1 e K_2 conjuntos compactos. Então, $K = K_1 \cap K_2$ é um conjunto compacto.*

Demonstração: Sejam K_1 e K_2 conjuntos compactos e $K = K_1 \cap K_2$. Temos K_1 limitados e $K \subset K_1$. Daí, K é limitado. Agora, provemos que K é fechado. Observemos que

$$\mathbb{R}^n - K = \mathbb{R}^n - (K_1 \cap K_2) = (\mathbb{R}^n - K_1) \cup (\mathbb{R}^n - K_2).$$

Como K_1 e K_2 são fechados, pois K_1 e K_2 são compactos, então, pelo Teorema 1.7, $\mathbb{R}^n - K_1$ e $\mathbb{R}^n - K_2$ são abertos. Logo, do Teorema 1.6, segue-se que $\mathbb{R}^n - K$ é aberto. Novamente pelo Teorema 1.7, K é fechado. Sendo K limitado e fechado, concluímos que K é compacto.

■

Se K é compacto, então K é limitado. Dada uma sequência (x_k) em K, teremos (x_k) limitada. Logo, pelo Teorema 1.3, existem $(x_{k_i}) \subset (x_k)$ e $a \in \mathbb{R}^n$ tais que $x_{k_i} \to a$. Como $(x_{k_i}) \subset K$ e K é fechado, segue-se que $a \in K$. Com isso, fica provado o seguinte teorema:

Teorema 1.9. *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto. Toda sequência em K possui uma subsequência convergente.*

Teorema 1.10 (Propriedade de Cantor)**.** *Sejam $K_1, K_2, ..., K_k, ...$ conjuntos compactos e não vazios tais que $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset ... \supset K_k \supset ....$ Então, o conjunto $F = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} K_k$ é (compacto e) não vazio.*

Demonstração: Para cada $k \in \mathbb{N}$, escolhamos um ponto $x_k \in K_k$, o que é possível, pois K_k é não vazio. Desta forma, obtemos uma sequência (x_k), a qual satisfaz $(x_k) \subset K_1$. Sendo K_1 compacto, segue-se do Teorema 1.9 que existem $(x_{k_i}) \subset (x_k)$ e $a \in K_1$ tais que $x_{k_i} \to a$. Afirmamos que $a \in K_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. De fato, dado $k \in \mathbb{N}$, temos $x_{k_i} \in K_k$, para $k_i > k$. Daí, $a \in K_k$. Sendo k arbitrário, concluímos que $a \in K_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, implicando em $a \in K$, mostrando que K é não vazio.

■

Uma outra forma de caracterizar os conjuntos compactos é por meio de coberturas. Esta caracterização será dada no Teorema de Borel-Lebesgue.

Definição 1.16. *Uma cobertura de um conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *é uma família* $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ *de subconjuntos* $C_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ *tal que* $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$.

Se L for um conjunto finito, a cobertura diz-se finita. Caso C_λ seja aberto para todo $\lambda \in L$, dizemos que a cobertura é aberta. Se L é enumerável, a cobertura chama-se enumerável.

Definição 1.17. *Uma subcobertura é uma subfamília* $(C_\lambda)_{\lambda \in L'}$*, com* $L' \subset L$*, tal que* $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$.

Agora, desejamos provar o Teorema de Borel-Lebesgue. Para isto, precisaremos do teorema que enunciaremos a seguir.

Teorema 1.11 (Teorema de Lindelöf)**.** *Sejam* $X \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto arbitrário e* $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ *uma cobertura aberta de* X*. Então, existe* $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *tal que* $X \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_{\lambda_i}$.

Teorema 1.12 (Teorema de Borel-Lebesgue)**.** *Seja* $K \subset \mathbb{R}^n$ *compacto. Toda cobertura aberta* $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ *admite uma subcobertura finita* $K \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup ... \cup A_{\lambda_i}$.

Demonstração: Pelo Teorema 1.11, $K \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_{\lambda_i}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, definamos o conjunto $K_i = K \cap (A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup ... \cup A_{\lambda_i})^C$. Temos

$$K \supset K_1 \supset K_2 \supset ... \supset K_i \supset ... \quad .$$

Observemos que, dado $i \in \mathbb{N}$, K_i é limitado, já que $K_i \subset K$ e K é compacto e, em particular, é limitado. Além disso, sendo A_{λ_k} aberto, para $1 \leq k \leq i$, segue-se do Teorema 1.6 que $A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup ... \cup A_{\lambda_i}$ é aberto e, pelo Teorema 1.7, $(A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup ... \cup A_{\lambda_i})^C$ é fechado. Como K, em particular, é fechado, usando os Teoremas 1.7 e 1.8 podemos afirmar que K_i é fechado. Assim, K_i é compacto.

Dado $x \in K$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_{\lambda_{i_0}}$, donde $x \in A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup ... \cup A_{\lambda_{i_0}}$ e consequentemente $x \notin K_{i_0}$. Desta forma, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i = \emptyset$. Segue-se do Teorema 1.10 que $K_m = \emptyset$, para algum $m \in \mathbb{N}$. Logo, $K_i = \emptyset$, para $i \geq m$. Portanto,

$$K \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup ... \cup A_{\lambda_m}.$$

■

1.3.4 Conjuntos Conexos

Consideremos os conjuntos $X = \mathbb{R} - \{0\}$ e $Y = \mathbb{R}$. Observemos que X pode ser escrito como $X = A \cup B$, onde $A = (-\infty, 0)$ e $B = (0, \infty)$ são subconjuntos não vazios, disjuntos e abertos em X. No entanto, se escrevermos Y da forma $Y = C \cup D$, com C e D conjuntos abertos e disjuntos, devemos ter obrigatoriamente $C = Y$ ou $D = Y$. Nestes casos, a decomposição de X e Y em conjuntos disjuntos e abertos em X e Y, respectivamente, é chamada cisão. Notemos que Y admite somente a cisão $Y = Y \cup \emptyset$, a qual é chamada de cisão trivial, e por isso dizemos que Y é um conjunto conexo . Formalmente, temos as seguintes definições:

Definição 1.18. *Uma cisão de um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição $X = A \cup B$, onde $A \cap B = \emptyset$ e A e B são ambos abertos em X*

Todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ admite pelo menos uma cisão, a saber $X = X \cup \emptyset$. Esta cisão é chamada cisão trivial . Lembremos que o conjunto $\emptyset$ é aberto como foi provado no Teorema 1.5.

Definição 1.19. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito conexo quando admite apenas a cisão trivial.*

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ ser conexo significa que se escrevermos a cisão $X = A \cup B$, devemos ter $A = X$ ou $B = X$.

Definição 1.20. *Seja $x \in X \subset \mathbb{R}^n$. A componente conexa do ponto x no conjunto X, denotada por C_x, é o maior conjunto conexo de X que contém x.*

Exemplo 1.3. *Seja $X = \mathbb{R} - 0$. Se $x = 1$, então $C_x = (0, +\infty)$. Por outro lado, se $x = -1$, teremos $C_x = (-\infty, 0)$.*

1.4 Aplicações Contínuas

Definição 1.21. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação. Dizemos que f é contínua no ponto $a \in X$ quando dado um número real $\epsilon > 0$, podemos encontrar um número real $\delta > 0$ tal que*

$$x \in X, \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Se f é contínua em todos os pontos de X, dizemos apenas que f é contínua.

Dados $X \subset \mathbb{R}^m$ e $f : X \to \mathbb{R}^n$, podemos ver f como n funções $f_1, f_2, ..., f_n : X \to \mathbb{R}$, as quais chamamos de funções coordenadas da aplicação f. Se $x \in X$, temos

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)).$$

Escrevemos ainda $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$.

Exemplo 1.4. *Seja $\|.\|$ uma norma em um espaço vetorial E. Temos*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|,$$

para quaisquer $x, y \in E$. Logo, dados $a \in E$ e $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \epsilon > 0$. Desta forma,

$$x \in E, \|x - a\| < \delta \Rightarrow |\|x\| - \|y\|| < \delta = \epsilon.$$

Assim,$\|.\|$ é uma aplicação contínua.

Teorema 1.13. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $a \in U$. Uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto a se, e somente se, para toda sequência $(x_k) \subset U$ tal que $x_k \to a$, tem-se*

$$\lim f(x_k) = f(a).$$

Demonstração: Seja f contínua em a. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in U, \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Se $(x_k) \subset U$ é uma sequência que converge para o ponto a, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > k_0 \Rightarrow \|x_k - a\| < \delta.$$

Desta forma, para $k > k_0$, devemos ter

$$\|f(x_k) - f(a)\| < \epsilon.$$

Assim,

$$\lim f(x_k) = f(a).$$

Reciprocamente, suponhamos que para toda sequência $(x_k) \subset U$ convergindo para a tenhamos

$$\lim f(x_k) = f(a).$$

Se f não é contínua em a, então existe $\epsilon_0 > 0$ e $(y_k) \subset U$ satisfazendo

$$\|y_k - a\| < \frac{1}{k} \quad e \quad \|f(y_k) - f(a)\| \geq \epsilon_0,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Desta forma, $y_k \to a$, mas não temos

$$\lim f(y_k) = f(a),$$

o que contraria nossa hipótese. Assim, f é contínua em a.

■

Teorema 1.14. *Seja $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$. Então, f é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de todo aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto em X.*

Demonstração: Suponhamos f contínua e seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Desejamos mostrar que $f^{-1}(A)$ é um aberto em X. Seja $a \in f^{-1}(A)$. Então, $f(a) \in A$. Sendo A aberto, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$B\left(f(a), \delta_1\right) \subset A.$$

Agora, como f é contínua em a, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, x \in B\left(a, \delta\right) \Rightarrow f(x) \in B\left(f(a), \delta_1\right) \subset A.$$

Logo,

$$x \in X, x \in B\left(a, \delta\right) \Rightarrow x \in f^{-1}(A),$$

o que implica

$$X \cap B(a, \delta) \subset f^{-1}(A).$$

Assim, $f^{-1}(A)$ é um aberto em X.

Reciprocamente, suponhamos que $f^{-1}(A)$ é aberto em X, para qualquer aberto $A \subset \mathbb{R}^n$. Provemos que f é contínua. Sejam $\epsilon > 0$ e $a \in X$. Então, $B\left(f(a), \epsilon\right)$ é um aberto. Logo, por hipótese, o conjunto

$$f^{-1}(B(f(a), \epsilon)) = \{x \in X; \|f(x) - f(a)\| < \epsilon\}$$

é aberto em X. Como $a \in f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$, existe $\delta > 0$ tal que

$$B(a, \delta) \cap X \subset f^{-1}(B(f(a), \epsilon)).$$

Daí,

$$\begin{aligned} x \in X, x \in B(a, \delta) \quad &\Rightarrow \quad x \in f^{-1}\left(B\left(f(a), \epsilon\right)\right) \\ &\Rightarrow \quad f(x) \in \left(B\left(f(a), \epsilon\right)\right). \end{aligned}$$

mostrando que f é contínua em a. Sendo a um ponto arbitrário em X, concluímos que f é contínua.

■

Corolário 1.1. *Seja $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$. Então, f é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(F)$ de todo fechado $F \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado em X.*

Demonstração: De fato, suponhamos f contínua e F um conjunto fechado. Então, $\mathbb{R}^n - F$ é aberto. Pelo Teorema 1.14, $f^{-1}(\mathbb{R}^n - F)$ é um aberto em X. Mas $f^{-1}(F) = X - f^{-1}(A)$. Consequentemente, $f^{-1}(F)$ é fechado em X. Reciprocamente, seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Então, $\mathbb{R}^n - A$ é fechado e, por hipótese, $f^{-1}(\mathbb{R}^n - A)$ é fechado em X. Desde que $f^{-1}(\mathbb{R}^n - A) = X - f^{-1}(A)$, segue-se que $f^{-1}(A)$ é aberto em X. Do Teorema 1.14, concluímos que f é contínua.

■

Definição 1.22. *Seja $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida num conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que f é uniformemente contínua quando dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x, y \in X, \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon.$$

É fácil verificar que toda aplicação uniformente contínua é contínua. No entanto, a recíproca não é válida. Neste sentido, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.15. *Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ um compacto. Se $f : K \to \mathbb{R}^n$ é contínua, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que f não é uniformemente contínua. Então, existem $\epsilon_0 > 0$ e $(x_k), (y_k) \subset K$, tais que

$$\|x_k - y_k\| < \frac{1}{k} \tag{1.4.1}$$

e

$$\|f(x_k) - f(y_k)\| \geq \epsilon_0, \tag{1.4.2}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como K é compacto, pelo Teorema 1.9, existem $(y_{k_j}) \subset (y_k)$ e $y \in K$ satisfazendo $y_{k_j} \to y$. De (1.4.1), podemos afirmar que $x_{k_j} \to y$. Sendo f contínua, segue-se do Teorema 1.13 que

$$\lim f(x_{k_j}) = \lim f(y_{k_j}) = f(y).$$

De (1.4.2) e da continuidade da norma, obtemos $\epsilon_0 \leq 0$, o que é um absurdo! Portanto, f é uniformemente contínua.

■

No andamento deste trabalho usaremos a relação entre limite de uma função e continuidade. De maneira informal, se f é uma função contínua em a, temos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

No entanto, para isto, devemos impor condições para o ponto a. A seguir veremos que condições são essas e a definição de limite.

Definição 1.23. *Um ponto a é ponto de acumulação de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ quando dado $\epsilon > 0$, tem-se*

$$B(a, \epsilon) \cap (X - a) \neq \emptyset.$$

O conjunto de todos os pontos de acumulação de X é denotado por X'

Definição 1.24. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $a \in X'$. Dizemos que L é o limite de uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^m$ quando x tende para o ponto a se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in X, 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \epsilon.$$

Observemos que se X é uma bola aberta de $\mathbb{R}^m$, então todo ponto de X é ponto de acumulação. Logo, se f é uma função definida em X e contínua em $a \in X$, das definições de continuidade e limite de função, temos

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{1.4.3}$$

De maneira mais geral, se $a \in X \cap X'$, ainda temos o limite em (1.4.3).

Para finalizar esta seção, demonstraremos o Teorema do Valor Intermediário para uma função definida num intervalo compacto, tomando valores em $\mathbb{R}$.

Teorema 1.16 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função e $d \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < d < f(b)$. Então, existe $c \in (a, b)$ satisfazendo*

$$f(c) = d.$$

Demonstração: Seja $A = \{x \in [a, b]; f(x) < d\}$. Observemos inicialmente que A é não vazio, já que $a \in A$. Além disso, A é limitado superiormente. Mostremos que A não possui um elemento máximo. De fato, suponhamos, por contradição, que A tem um maior elemento α. Então, $\alpha \in A$ e

$$x \leq \alpha, \forall x \in A. \tag{1.4.4}$$

Desde que $\alpha \in A$, temos $f(\alpha) < d$. Como $d < f(b)$, $f(\alpha) \neq f(b)$. Logo, devemos ter $\alpha \neq b$. Assim, $\alpha < b$. Tomemos $\epsilon = d - f(\alpha) > 0$. Sendo f contínua, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in [a, b], |x - \alpha| < \delta \Rightarrow f(\alpha) - \epsilon < f(x) < f(\alpha) + \epsilon.$$

Em particular, temos

$$x \in [a, b], x \in [a, a + \delta) \Rightarrow f(x) < f(\alpha) + \epsilon.$$

Suponhamos δ suficientemente pequeno de modo que $[\alpha, \alpha+\delta] \subset [a,b]$. Desta forma,

$$x \in [\alpha, \alpha+\delta) \Rightarrow f(x) < f(\alpha) + \epsilon = d.$$

Portanto, todos os pontos do intervalo $[\alpha, \alpha+\delta)$ pertencem a A. Tomando $x_0 = \alpha + \frac{\delta}{2}$, teremos $x_0 \in A$ e $x_0 > \alpha$, contradizendo (1.4.4). Com isso, concluímos que A não possui um maior elemento.

Seja $c = \sup A$. Então, existe $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \to c$. Usando a continuidade de f, obtemos

$$f(c) = \lim f(x_n). \tag{1.4.5}$$

Desde que $(x_n) \subset A$, temos $f(x_n) < d$. Daí, aplicando o Teorema 1.2 para a sequência $(f(x_n))$,

$$\lim f(x_n) \leq d. \tag{1.4.6}$$

De (1.4.5) e (1.4.6), $f(c) \leq d$. Como $c = \sup A$ e A não possui elemento máximo, segue-se que $c \notin A$. Assim, não podemos ter $f(c) < d$. Consequentemente, $f(c) = d$.

■

1.5 Exercícios

1. Mostre que as aplicações $\|.\|_M$ e $\|.\|_S$, definidas na Seção 1.1, são normas em $\mathbb{R}^n$.

2. Sejam E um espaço vetorial e $<,>$ um produto interno em E. Considere a aplicação $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ definida por $\|x\| = \sqrt{<x,x>}$.
(a) Mostre que $\|.\|$ é uma norma em E.
(b) (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Para todo $x, y \in E$, tem-se

$$|<x,y>| \quad \leq \quad \|x\|\|y\|.$$

3. Um ponto $a \in X \subset \mathbb{R}^n$ é um ponto interior a X quando existe uma bola aberta $B(a,\delta)$ tal que $B(a,\delta) \subset X$. O conjunto dos pontos interiores a X é denotado por $int\ \ X$. Mostre que $int\ \ X$ é um conjunto aberto.

4. Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é um ponto aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando toda bola com centro em a possui pontos de X. Denotamos o conjunto dos pontos aderente a X por $\bar{X}$ e o chamamos de fecho de X. Mostre que:

(a) o fecho de um conjunto é um conjunto fechado;
(b) $\overline{B(a,r)} = B[a,r]$.

5. Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ é localmente constante quando para cada $x \in X$ existe uma bola B de centro x tal que f restrita a $B \cap X$ é constante. Mostre que X é conexo se, e somente se, toda aplicação localmente constante $f : X \to \mathbb{R}^n$ é constante.

6. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é conexo se, e somente se, é um intervalo.

7. O fecho de um conjunto conexo é um conjunto conexo.

8. Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in X$. Mostre que a componente conexa C_x é um conjunto fechado.

9. Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ contínua. Então, $f(K)$ é compacto para qualquer conjunto $K \subset X$ compacto.

10. Seja $f : K \to \mathbb{R}$ contínua, onde $K \subset \mathbb{R}^m$ é compacto. Então, existem $a, b \in K$ tais que

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \forall x \in K.$$

11. A composição de funções contínuas é uma função contínua.

12. Uma função $f = (f_1, ..., f_n) : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se, cada função coordenada $f_i : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a.

13. Seja $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear.
(a) Mostre que existe $C > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$;
(b) Defina $\|.\| : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ pondo

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^m - \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}.$$

Prove que $\|.\|$ é uma norma em $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, onde $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é o conjunto de todas as transformações lineares $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.
(c) Dada $T \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, tem-se

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

14. Toda aplicação linear $T : R^m \to R^n$ é contínua.

15. Uma métrica em um conjunto M é uma aplicação $d : M \times M \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições, para quaisquer $x, y, z \in M$:
(d1) $d(x, y) \geq 0$;
(d2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(d3) $d(x, y) = d(y, x)$;
(d4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

(a) Seja E um espaço normado e defina $d : E \times E \to \mathbb{R}$ pondo

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Mostre que d é uma métrica em E.
(b) Um espaço métrico é um conjunto munido de uma métrica. Todo espaço normado é um espaço métrico.

16. **(a)** Defina aplicação contínua em espaços métricos.
(b) Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ é uma contração quando existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y), \forall x, y \in M.$$

Mostre que toda contração é uma aplicação contínua.

17. **(a)** Defina sequência convergente e sequência de Cauchy em um espaço métrico.
(b) Sejam M espaço métrico não vazio e $f : M \to M$ uma contração. Dado $x_0 \in M$, considere a sequência $(x_k) \subset M$ dada por

$$x_k = f(x_{k-1}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Mostre que (x_k) é uma sequência de Cauchy.
(c) Um espaço métrico é dito completo quando toda sequência de Cauchy é convergente. Se no item (b) M é um espaço métrico completo, conclua que (x_k) é convergente.

(d) Use a continuidade de f e mostre que $a = f(a)$, onde a é o limite da sequência (x_k) obtida no item (c). Além disso, a é o único elemento de M que satisfaz $a = f(a)$. O ponto a é chamado ponto fixo de f.

Observação 1.1. *Do Exercício 17 concluímos que vale o seguinte resultado, conhecido como Teorema do Ponto Fixo de Banach: Seja M um espaço métrico completo e $f : M \to M$ uma contração. Então, f possui um único ponto fixo.*

18. Um homeomorfismo é uma aplicação bijetiva contínua cuja a inversa também é contínua. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ uma contração. Mostre que a aplicação $f : U \to \mathbb{R}^m$ dada por $f(x) = x + \phi(x)$ é um homeomorfismo de U sobre o aberto $f(U) \subset \mathbb{R}^m$. Além disso, se $U = \mathbb{R}^m$, então $f(U) = \mathbb{R}^m$. Este resultado é conhecido como Perturbação da Identidade.

19. Mostre que a composição de homeomorfismos é um homeomorfismo.

20. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ a aplicação dada por $f(x) = T(x) + \phi(x)$, onde $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo e $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ satisfaz

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \lambda \|x - y\|,$$

para todo $x, y \in U$ e para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ verificando $\lambda \|T^{-1}\| < 1$. Então, f é um homeomorfismo de U sobre o aberto $f(U) \subset \mathbb{R}^m$. Este resultado é conhecido como Perturbação do Isomorfismo.

21. Prove que o conjunto $GL\left(\mathbb{R}^m\right)$ de todas as transformações lineares inversíveis $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é aberto.

Capítulo 2

Derivada e Diferenciabilidade

2.1 Aplicações Diferenciáveis

Definição 2.1. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação. Dizemos que f é diferenciável em $a \in U$ se existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$f(a+v) - f(a) = T(v) + r(v),$$

onde $\frac{r(v)}{\|v\|} \longrightarrow 0$ quando $\|v\| \longrightarrow 0$. Dizemos que f é diferenciável se f é diferenciável em todos os pontos de U.

Na definição acima, estamos supondo que $a + v \in U$, o que possível, já que U é aberto. Além disso, a transformação linear T é chamada a derivada de f no ponto a e é indicada por $f'(a)$, ou seja, $T = f'(a)$.

Exemplo 2.1. *Seja $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear. Então,*

$$T(x+v) - T(x) = T(x) + T(v) - T(x) = T(v).$$

Logo,

$$T(x+v) - T(x) = T(v) + r(v),$$

onde $r(v) = 0$. Daí, T é diferenciável e $T'(x) = T$. Com isso, fica provado que toda aplicação linear é diferenciável.

Exemplo 2.2. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em $a \in U$. Fixado $y \in \mathbb{R}^m$, definamos a função $g_y = U \to \mathbb{R}$ pondo*

$$g_y(x) \quad = \quad < f(x), y > .$$

Então, g_y é diferenciável em a e

$$g_y'(a)(v) \quad = \quad < f'(a)(v), y > .$$

Demonstração: Sendo f diferenciável em a, podemos escrever

$$f(a+v) - f(a) - f'(a)(v) = r(v),$$

onde

$$\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} s(v) &= g_y(a+v) - g_y(a) \quad - \quad < f'(a)(v), y > \\ &= < f(a+v), y > \quad - \quad < f(a), y > \quad - \quad < f'(a)(v), y > \\ &= < f(a+v) - f(a) - f'(a)(v), y > . \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} |s(v)| &= | < f(a+v) - f(a) - f'(a)(v), y > | \\ &\leq \|f(a+v) - f(a) - f'(a)(v)\| \|y\| \\ &= \|r(v)\| \|y\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{v \to 0} \frac{|s(v)|}{\|v\|} = \lim_{v \to 0} \frac{\|r(v)\|}{\|v\|} \|y\| = 0.$$

Assim, g_y é diferenciável em a e

$$g'(a)(v) \quad = \quad < f'(a)(v), y > .$$

∎

Do estudo de derivada de uma função uma variável, sabemos que se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Para uma aplicação f definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ tomando valores em $U \subset \mathbb{R}^n, n > 1$, não temos uma versão com a forma de igualdade. No entanto, temos o

Teorema 2.1. *(Desigualdade do Valor Médio) Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$. Suponhamos que para $a, b \in U$ tenhamos $S = [a, b] \subset U$ e f diferenciável em todos os pontos de S.Então, existe um ponto $c \in S$ stisfazendo*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)(b - a)\|. \tag{2.1.1}$$

Para demonstrar o Teorema 2.1, precisamos de uma versão mais simples desse teorema, a qual segue abaixo.

Teorema 2.2. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma plicação definida num aberto U. Suponhamos $a, b \in U$ tais que $S = [a, b] \subset U$ e f diferenciável em todos os pontos de S.Então, existe um ponto $c \in S$ stisfazendo*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Em ambos os teoremas acima, $[a, b] = \{(1 - t)a + bt; t \in [0, 1]\}$.

Demonstração: (do Teorema 2.1) Seja $y_0 = f(b) - f(a)$. Se $y_0 = 0$, a desigualdade (2.1.1) é imediata. Suponhamos $y_0 \neq 0$ e consideremos $y_1 = \frac{y_0}{\|y_0\|}$. Definamos a função $H : U \to \mathbb{R}$ pondo

$$H(x) \;=\; < f(x), y_1 > .$$

Temos

$$\begin{aligned} H(b) - H(a) &= < f(b), y_1 > - < f(a), y_1 > \\ &= < f(b) - f(a), \frac{y_0}{\|y_0\|} > \\ &= \|f(b) - f(a)\|, \end{aligned}$$

isto é,

$$H(b) - H(a) = \|f(b) - f(a)\|, \tag{2.1.2}$$

Por outro lado, sendo f diferenciável em S, segue-se do Exemplo 2.2 que H é diferenciável em S e

$$H'(x)(v) \;=\; < f'(x)(v), y_1 >, \forall x \in S.$$

Pelo Teorema 2.2, existe $c \in S$ tal que

$$H(b) - H(a) = H'(c)(b - a),$$

ou seja,

$$H(b) - H(a) \;=\; < f'(c)(b - a), y_1 > .$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de que $\|y_1\| = 1$, temos

$$\begin{aligned} |H(b) - H(a)| &\leq \|f'(c)(b-a)\| \|y_1\| \\ &= \|f'(c)(b-a)\|. \end{aligned}$$

De (2.1.2), concluimos que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)(b-a)\|.$$

■

Se f' é limitada, segue imediatamente do Teorema 2.1 que existe $M > 0$ tal que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b-a\|.$$

O teorema a seguir relaciona diferenciabilidade e continuidade.

Teorema 2.3. *Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se f é diferenciável em $a \in U$, então f é contínua em a.*

<u>Demonstração</u>: Sendo f diferenciável em a, podemos escrever

$$f(a+v) - f(a) = f'(a)(v) + r(v),$$

onde $\frac{r(v)}{\|v\|} \longrightarrow 0$ quando $\|v\| \longrightarrow 0$. Para $x = a + v$, temos

$$x \to a \Leftrightarrow v \to 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{v \to 0} [f(a+v) - f(a)] \\ &= \lim_{v \to 0} [f'(a)(v) + r(v)]. \end{aligned}$$

Como $f'(a)$ é linear, temos $f'(a)(0) = 0$ e $f'(a)$ é contínua. Consequentemente,

$$\lim_{v \to 0} f'(a)(v) = f'(a)(0) = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \lim_{v \to 0} [r(v)] &= \lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|}.\|v\| \\ &= \lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|}. \lim_{v \to 0} \|v\| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]=0,$$

isto é,

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a),$$

de onde segue-se que f é contínua em a.

$\blacksquare$

Definição 2.2. *Consideremos uma aplicação $f:U\to\mathbb{R}^n$, definida no aberto $U\subset\mathbb{R}^m$. A derivada direcional de f em $a\in U$ na direção de um vetor v, denotada por $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$, é dada por*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t},$$

caso o limite exista.

Definição 2.3. *Sejam $U\subset\mathbb{R}^m$ um conjunto aberto e $f:U\to\mathbb{R}^n$ uma aplicação. A i-ésima derivada parcial de f em um ponto $a\in U$,$1\leq i\leq m$, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, é definida como sendo o limite:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t},$$

se o limite existir.

Neste caso, o vetor e_i é o vetor de $\mathbb{R}^m$ em que a i-ésima coordenada é igual a 1 e as demais são zero. Observemos que a i-ésima derivada parcial é um caso particular da derivada direcional quando $v=e_i$.

Teorema 2.4. *Seja $U\subset\mathbb{R}^m$ um conjunto aberto. Se $f:U\to\mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável no ponto $a\in U$, então para todo $v\in U$, temos que $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ existe e*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a)=f'(a)(v).$$

Demonstração: Suponhamos f diferenciável em a. Dado $v\in U$, tomemos t suficientemente próximo de 0 de modo que $a+tv\in U$. Desta forma,

$$f(a+tv)-f(a)=f'(a)(tv)+r(tv),$$

onde $\frac{r(tv)}{\|tv\|} \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} f'(a)(v) &= \frac{f'(tv)}{t} \\ &= \frac{f(a+tv)-f(a)-r(tv)}{t} \\ &= \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} - \frac{r(tv)}{t} \\ &= \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} - \frac{r(tv)}{t\|v\|}\|v\| \\ &= \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \pm \frac{r(tv)}{\|tv\|}\|v\|. \end{aligned}$$

Passando o limite $t \to 0$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = f'(a)(v).$$

■

Corolário 2.1. *Se f é diferenciável em a, então a transformação linear $f'(a)$ é única.*

<u>Demonstração</u>: Se f é diferenciável em a, segue-se do Teorema 2.4 que

$$f'(a)(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}.$$

A unicidade de $f'(a)$ é decorrente da unicidade do limite da derivada direcional.

■

Em muitos casos, usamos a unicidade para determinar a derivada de uma função. Se escrevermos

$$f(a+v) - f(a) = g(v) + r(v),$$

com $\lim_{v\to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$, da unicidade da derivada, segue-se que $g = f'(a)$. Fizemos isso para concluir os Exemplos 2.1 e 2.2.

Definição 2.4. *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1, e escrevemos $f \in C^1$, quando f é diferenciável e a aplicação derivada $f' : U \to L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ é contínua. Dizemos que f é de classe C^k quando f' é de classe C^{k-1}. Diz-se que f é de classe C^∞ quando f é de classe C^k, para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Seja $B(X, \mathbb{R}^n)$ o conjunto das aplicações $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que são limitadas. Definamos $\|.\| : B(X, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ pondo

$$\|f\|_B = \sup\{\|f(x)\|; x \in X\}.$$

Desta forma, $\|.\|$ é uma norma em $B(X, \mathbb{R}^n)$. Em particular, a partir de agora, iremos indicar por $C \subset B(X, \mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções contínuas limitadas e $\|.\|_B$ também é uma norma em C, a qual iremos denotar por $\|.\|_\infty$.

Se $f \in C^1$ e f e f' são limitadas, a norma em C^1 que iremos usar é $\|.\|_{C^1}$, dada por

$$\|f\|_{C^1} = \sup_{x \in K} \|f(x)\| + \sup_{x \in K} \|f'(x)\|.$$

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear, com V e W espaços vetoriais. Se α é uma base de V e β é base de W, sabemos da Álgebra Linear que podemos associar a T uma matriz em relação às bases dadas.

Se f uma aplicação diferenciável em a. Então, $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear. Sendo assim, podemos associar $f'(a)$ a uma matriz de ordem $n \times m$, em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$. Esta matriz é chamada matriz jacobiana de f no ponto a e o determinante desta matriz é chamado de jacobiano de $f'(a)$ e é denotado por $J_f(a)$, ou seja,

$$J_f(a) = \det\,[f'(a)].$$

A matriz jacobiana de f em a é dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

e daí o jacobiano de $f'(a)$ é

$$J_f(a) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}.$$

Definição 2.5. *Sejam U e V abertos de $\mathbb{R}^m$. Uma bijeção $f : U \to V$ é um difeomorfismo de U sobre V quando é diferenciável e sua inversa $f^{-1} : V \to U$ também é diferenciável.*

Definição 2.6. *Dado um ponto $x \in \mathbb{R}^m$, um conjunto V_x é uma vizinhança de x quando existe uma bola B com centro em x tal que $B \subset V_x$.*

Definição 2.7. *Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^m$ e $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que f é um difeomorfismo local quando para cada $x \in U$ existe uma vizinhança V_x, com $x \in V_x \subset U$, tal que a restrição de f a V_x é um difeomorfismo sobre um aberto W_x de $\mathbb{R}^m$.*

Se $f : U \to \mathbb{R}^m$ é um difeomorfismo local de U sobre $V = f(U)$, então, para cada $x \in U$, $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo. O Teorema da Aplicação Inversa, o qual veremos mais adiante e que será de grande utilidade neste trabalho, estabelecerá a recíproca.

2.2 O Teorema da Função Inversa

Nesta seção, demonstraremos o Teorema da Função Inversa. Antes disso, devemos provar os dois próximos teoremas.

Teorema 2.5. *Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável em $a \in U$, com U um aberto de $\mathbb{R}^m$. Se $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, então existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que*

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \geq c\|x - a\|.$$

Demonstração: Seja $x \in \mathbb{R}^m$. Notemos que

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|[f'(a)]^{-1} f'(a)(x)\| \\ &\leq \|[f'(a)]^{-1}\| \|f'(a)(x)\|. \end{aligned}$$

Daí,

$$\|f'(a)(x)\| \geq \frac{1}{\|[f'(a)]^{-1}\|} \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Escolhamos $c > 0$ de modo que $2c \leq \frac{1}{\|[f'(a)]^{-1}\|}$. Desta forma,

$$\|f'(a)(x)\| \geq 2c\|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Sendo f diferenciável em a, segue-se que

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + r(x - a),$$

onde

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x - a)}{\|x - a\|} = 0.$$

Deste último limite, podemos afirmar que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x-a\| < \delta \Rightarrow \|r(x-a)\| < c\|x-a\|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|x-a\| \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| &= \|f'(a)(x-a)+r(x-a)\| \\ &\geq \|f'(a)(x-a)\| - \|r(x-a)\| \\ &\geq 2c\|x-a\| - c\|x-a\| \\ &= c\|x-a\|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| \geq c\|x-a\|.$$

■

Teorema 2.6 (Diferenciabilidade do Homeomorfismo Inverso)**.** *Sejam U e V abertos de $\mathbb{R}^m$ e $f : U \to V$ um homeomorfismo. Se f é diferenciável em $a \in U$ e $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, então $f^{-1} : V \to U$ é diferenciável em $b = f(a)$ e*

$$(f^{-1})'(b) = [f'(a)]^{-1}.$$

Demonstração: Temos $b = f(a)$. Para $a + v \in U$, escrevamos

$$f(a+v) = b + w.$$

Desta forma,

$$w = f(a+v) - b = f(a+v) - f(a) = f'(a)(v) + r(v),$$

onde $\frac{r(v)}{\|v\|} \to 0$ quando $v \to 0$, o que é possível já que f é diferenciável.

Seja $g = f^{-1}$. Temos

$$v = (a+v) - a = g(f(a+v)) - g(f(a)) = g(b+w) - g(b).$$

Para mostrar que $[f'(a)]^{-1}$ é a derivada de g no ponto b, vamos escrever

$$g(b+w) - g(b) = [f'(a)]^{-1}(w) + s(w)$$

e provar que

$$\lim_{w \to 0} \frac{s(w)}{\|w\|} = 0.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} v &= g(b+w) - g(b) \\ &= [f'(a)]^{-1}(w) + s(w) \\ &= [f'(a)]^{-1}(f'(a)(v) + r(v)) + s(w) \\ &= v + [f'(a)]^{-1} r(v) + s(w). \end{aligned}$$

Logo,

$$s(w) = -[f'(a)]^{-1} r(v).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\|s(w)\|}{\|w\|} &= \frac{\|[f'(a)]^{-1} r(v)\|}{\|w\|} \\ &\leq \|[f'(a)]^{-1}\| \frac{\|r(v)\|}{\|w\|} \\ &= \|[f'(a)]^{-1}\| \frac{\|r(v)\|}{\|v\|} \frac{\|v\|}{\|f(a+v) - f(a)\|}. \end{aligned}$$

Desde que $f'(a)$ é um isomorfismo, do Teorema 2.5, segue-se que existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que, para $\|v\| < \delta$, temos

$$\|f(a+v) - f(a)\| \geq c\|v\|.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \frac{\|s(w)\|}{\|w\|} &\leq \|[f'(a)]^{-1}\| \frac{\|r(v)\|}{\|v\|} \frac{\|v\|}{\|f(a+v) - f(a)\|} \\ &\leq \frac{\|[f'(a)]^{-1}\|}{c} \frac{\|r(v)\|}{\|v\|}. \end{aligned}$$

Observando que $v = g(b+w) - g(b)$ e g é contínua em V, temos $w \to 0$ implica em $v \to 0$. Desta forma,

$$0 \leq \lim_{w \to 0} \frac{\|s(w)\|}{\|w\|} \leq \frac{\|[f'(a)]^{-1}\|}{c} \lim_{v \to 0} \frac{\|r(v)\|}{\|v\|} = 0,$$

donde

$$\lim_{w \to 0} \frac{\|s(w)\|}{\|w\|} = 0.$$

Portanto, $g = f^{-1}$ é diferenciável em b e

$$(f^{-1})'(b) = g(b) = [f'(a)]^{-1}.$$

■

Vamos agora enunciar e demonstrar o Teorema da Aplicação Inversa.

Teorema 2.7 (Teorema da Aplicação Inversa). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto, $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^1. Se $a \in U$ e $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, então f é um difeomorfismo de classe C^1 de uma aberta $V = B(a, \delta)$ sobre um aberto $W = f(V)$ contento $b = f(a)$. Além disso,*

$$(f')^{-1}(b) = [f'(a)]^{-1}.$$

Demonstração: Por hipótese, $f : U \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação de classe C^1. Daí, f é diferenciável em $a \in U$. Então,

$$f(a+v) - f(a) = f'(a)v + r(v), \tag{2.2.3}$$

onde

$$\lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0$$

e $v \in U$ é tomado de modo que $a + v \in U$.

Vamos supor inicialmente que $a = f(a) = 0$. De (2.2.3), ficamos com

$$f(v) = f'(a)(v) + r(v),$$

ou seja,

$$r(v) = f(v) - f'(a)(v).$$

Sendo f e $f'(a)$ diferenciáveis, segue-se que r é diferenciável e

$$r'(v) = f'(v) - f'(a)$$

e assim $r'(a) = 0$. Desde que $f' : U \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ é contínua, pois $f \in C^1$, dado $\lambda \in \left(0, \frac{1}{\|f'(a)\|}\right)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|r'(v)\| \leq \lambda, \forall v \in B(a, \delta)).$$

Pela Desigualdade do Valor Médio,

$$\|r(v) - r(w)\| \leq \lambda \|v - w\|, \forall v, w \in B(a, \delta).$$

Consideremos agora $V = B(a, \delta)$. Desta forma, a aplicação $f : V \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$f(v) = f'(a)(v) + r(v)$$

é uma perturbação do isomorfismo $f'(0)$. Pelo Exercício ?, f é um homeomorfismo de V sobre o aberto $W = f(V)$ que contém $b = f(a)$.

Sabemos que o conjunto $GL(\mathbb{R}^m)$ de todas as transformações lineares inversíveis $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é aberto e $f'(a) \in GL(\mathbb{R}^m)$. Logo, a bola V de centro a pode ser tomada, se necessário, de modo que $f'(x)$ é linear e inversível, para todo $x \in V$. Pelo Teorema 2.6, $g = f^{-1} : W \to V$ é diferenciável e

$$g'(y) = [f'(g(y))]^{-1}, \forall g \in W.$$

Além disso, g' é contínua e podemos afirmar que $g = f^{-1}$ é de classe C^1.

Para o caso mais geral, no qual $f(a) \neq 0$, basta tomar $F(x) = f(x + a) - f(a)$ e daí $F(0) = 0$ e $F'(0) = f'(a)$.

■

2.3 O Teorema de Sard

Comecemos esta seção com a definição de conjunto de medida nula. Depois, veremos o Teorema de Sard. Dado um cubo n-dimensional A, denotaremos o volune de A por $Vol(A)$.

Definição 2.8. *Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula, e escrevemos $m(X) = 0$, quando, dado $\epsilon > 0$, existem uma família $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de cubos n-dimensionais abertos tais que:*

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} C_i \quad e \quad \sum_{i=1}^{+\infty} Vol(C_i) < \epsilon.$$

Não iremos nos aprofundar nas propriedades de conjuntos de medida nula. No entanto, utilizaremos alguns resultados que podem ser verificados sem grandes dificuldades, os quais ficam a cargo do leitor demonstrar. Sem tanto formalismo, são eles: "Todo subconjunto de medida nula tem medida nula"e a "União enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula".

Teorema 2.8 (Teorema de Sard)**.** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 e*

$$S = \{x \in U; J_f(x) = 0\}.$$

Então, $f(S)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Seja C um cubo de aresta a contido em U. Divida-o em k^n subcubos todos de aresta $\frac{a}{k}$. Desde que a aplicação $x \mapsto f'(x)$ é contínua, f' é uniformemente contínua em C. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f'(x) - f'(y)\| < \epsilon. \tag{2.3.4}$$

Escolhamos k suficientemente grande de modo que $\frac{\sqrt{n}a}{k} < \delta$, isto é, o diâmetro de todos os subcubos é menor do que δ. Sendo f' limitada em C, segue-se da Desigualdade do Valor Médio que

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|L\|x_1 - x_2\|, \forall x_1, x_2 \in C,$$

para algum $L > 0$.

Seja $x \in C \cap S$. Então, existe um subcubo $\tilde{C}$ tal que $x \in \tilde{C}$. Daí, para todo $y \in \tilde{C}$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \leq \frac{L\sqrt{n}a}{k}. \tag{2.3.5}$$

Por outro lado, pelo Teorema do Valor Médio (para Integrais),

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 f'(x + t(y - x))(y - x)dt.$$

Como

$$f'(x)(x - y) = \int_0^1 f'(x)(x - y)dt,$$

temos

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) - f'(x)(y - x) &= \int_0^1 [f'(x + t(x - y)) - f'(x)(x - y)]dt \\ &= \int_0^1 [f'(x + t(y - x)) - f'(x)](y - x)dt. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)\| &\leq \int_0^1 \|f'(x + t(y - x)) - f'(x)\|\|y - x\|dt \\ &\leq \int_0^1 \frac{\epsilon\sqrt{n}a}{k}dt \\ &= \frac{\epsilon\sqrt{n}a}{k}. \end{aligned}$$

Desde que $x \in S$, $H = f'(x)(\mathbb{R}^n)$ é subespaço de dimensão menor do que ou igual a $n - 1$ e

$$\rho(f(y), f(x) + H) \leq \frac{\epsilon\sqrt{n}a}{k}, \forall y \in \tilde{C}. \tag{2.3.6}$$

De (2.3.5) e (2.3.6), deduzimos que $f(\tilde{C})$ está contido em um bloco cilíndrico de raio $\frac{L\sqrt{n}a}{k}$ e altura $2\frac{\epsilon\sqrt{n}a}{k}$. Desta forma,

$$m(f(\tilde{C})) \leq 2A\epsilon\sqrt{n}\frac{a}{k}(2L\sqrt{n}\frac{a}{k})^{n-1},$$

onde A é uma constante que depende somente de n. Daí,

$$m(f(C \cap S)) \leq \sum_{\tilde{C} \cap S \neq \emptyset} m(f(\tilde{C})) \leq K\epsilon,$$

com K sendo uma constante que depende de C e n. Desde que ϵ é arbitrário, temos $m(f(C \cap S)) = 0$, para qualquer cubo C contido em Ω. Como Ω pode ser coberto por uma quantidade enumerável de tais cubos, segue-se que $f(S)$ tem medida.

■

A seguir apresentaremos a definição de conjunto J-mensurável (ou mensurável segundo Jordan). No propósito é enunciar o Teorema de Mudança de Variáveis.

Definição 2.9. *Um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$ é J-mensurável quando $m(\partial X) = 0$.*

Exemplo 2.3. *Toda esfera tem medida nula. Assim, toda bola (aberta ou fechada) em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto J-mensurável.*

Teorema 2.9 (Teorema de Mudança de Variáveis)**.** *Sejam U e V conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n, X \subset U$ um compacto J-mensurável, $h : U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1 e $f : h(X) \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então, $f \circ h : X \to \mathbb{R}$ é integrável e*

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x))|det \quad h'(x)|dx.$$

2.4 Suporte de uma Função

Definição 2.10. *Sejam Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos o suporte de u, o qual denotaremos por supt u, como sendo o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$, ou seja,*

$$supt \quad u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

Se o conjunto *supt* u for um compacto de $\mathbb{R}^n$, dizemos que u possui suporte compacto. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que têm suporte compacto.

Lema 2.1. *Seja $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por*

$$\theta(x) = \begin{cases} exp(-x^{-1}), & se \quad x > 0 \\ 0, & se \quad x \leq 0 \end{cases}.$$

Então, θ é uma função C^∞.

Demonstração: Vamos verificar que θ é de classe C^1. Se $x < 0$, temos $\theta'(x) = 0$ e se $x > 0$, $\theta'(x) = x^{-2}exp(-x^{-1})$. Calculemos $\theta'(0)$. Observemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\theta(x) - \theta(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{exp(-x^{-1})}{x}.$$

Usando a Regra de L'Hôspital, temos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{exp(-x^{-1})}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{-2}exp(-x^{-1}).$$

Desta forma,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\theta(x) - \theta(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} x^{-2}exp(-x^{-1}) = 0,$$

implicando na existência de $\theta'_+(0)$, com $\theta'_+(0) = 0$. Além disso,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\theta(x) - \theta(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{0}{x} = 0.$$

Daí, $\theta'_-(0)$ existe e $\theta'_-(0) = 0$. Assim, $\theta'(0)$ existe e $\theta'(0) = 0$. Consequentemente, θ é diferenciável e

$$\theta'(x) = \begin{cases} x^{-2}exp(-x^{-1}), & \text{se} \quad x > 0 \\ 0, & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}.$$

Observando que θ' é contínua, podemos afirmar que θ é de classe C^1. Para concluir que θ é de classe C^∞, basta verificar que, quando $x \to 0^-$, todas as derivadas se anulam. Já quando $x \to 0^+$, as derivadas são uma combinação linear de termos da forma $x^{-n}exp(-x^{-1})$. Usando a Regra de L'Hôspital, vemos que estes termos tendem a zero, quando $x \to 0^+$.

∎

Exemplo 2.4. *Consideremos a função* $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\theta(x) = \begin{cases} exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & se \quad |x| < 1 \\ 0, & se \quad |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Temos

$$exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = exp\left(x^2-1\right)^{-1} = exp\left[-(1-x^2)^{-1}\right] = exp\left(-u^{-1}\right),$$

onde $u = 1 - x^2$. *Observemos que* $|x| < 1$ *se, e somente se,* $u > 0$. *Logo, podemos reescrever* θ *da seguinte forma:*

$$\theta(u) = \begin{cases} exp(-u^{-1}), & se \quad u > 0 \\ 0, & se \quad u \leq 0 \end{cases}.$$

Assim, pelo Lema 2.1, segue-se que θ *é* C^{∞}. *Além disso,*

$$\{x \in \mathbb{R}; \theta(x) \neq 0\} = (-1, 1),$$

o que implica

$$\overline{\{x \in \mathbb{R}; \theta(x) \neq 0\}} = [-1, 1].$$

Desta forma, θ *tem suporte compacto e, portanto,* $\theta \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, *com supt* $\theta = [-1, 1]$.

Exemplo 2.5. *Podemos generalizar o exemplo acima definindo a função* $\theta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *pondo:*

$$\theta(x) = \begin{cases} exp\left(\frac{1}{\|x\|^2-1}\right), & se \quad \|x\| < 1 \\ 0, & se \quad \|x\| \geq 1 \end{cases},$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $\|x\| = \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$. *Neste caso,* $\theta \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *e supt* $\theta = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\} = \overline{B_1(0)}$.

Exemplo 2.6. *Sejam* $\theta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *a função definida no Exemplo 2.5 e*

$$C = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \theta(x) dx\right)^{-1}.$$

Consideremos a sequência de funções θ_k *dada por*

$$\theta_k(x) = Ck^n\theta(kx).$$

Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$*, temos* $\theta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e supt* $\theta_k = \overline{B_{\frac{1}{k}}(0)}$. *Assim,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \theta_k(x)dx = \int_{B_{\frac{1}{k}}(0)} Ck^n exp\left(\frac{1}{\|kx\|^2-1}\right)dx.$$

Fazendo a mudança de variável $\xi = kx$*, temos*

$$\int_{B_{\frac{1}{k}}(0)} Ck^n exp\left(\frac{1}{\|kx\|^2-1}\right)dx = \int_{B_1(0)} Ck^n exp\left(\frac{1}{\|\xi\|^2-1}\right)\frac{1}{k^n}d\xi.$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \theta_k(x)dx = \left(\int_{\mathbb{R}^n}\theta(x)dx\right)^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\theta(\xi)d\xi = 1,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \theta_k(x)dx = 1, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definição 2.11. *Uma sequência de funções* θ_k *é dita uma sequência regularizante quando*

$$\theta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), supt\ \ \theta_k = \overline{B_{\frac{1}{k}}(0)}, \int_{\mathbb{R}^n}\theta_k(x)dx = 1 \quad e \quad \theta_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

A sequência de funções definida no Exemplo 2.6 é uma sequência regularizante.

2.5 Exercícios

1. Se f e g são diferenciáveis em a, então $f+g$ é diferenciável em a e

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

2. (Regra da Cadeia) Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos e $f : U \to \mathbb{R}^n$ e $g : V \subset \mathbb{R}^p$ aplicações tais que para cada $a \in U$ tem-se $f(a) = b \in V$. Considere a aplicação $h = g \circ f : f^{-1}(V) \to \mathbb{R}^p$. Se f é diferenciável em a e g é diferenciável em $b = f(a)$, então h é diferenciável em a e

$$h'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$$

3. Dê exemplo de uma função contínua que não é diferenciável.

4. Dê exemplo de uma função que possui a derivada direcional em todas as direções, mas que não é diferenciável.

5. Dê exemplo de uma função bijetiva diferenciável, cuja inversa não é diferenciável.

6. Mostre o Teorema 2.2.

7. No Teorema da Aplicação Inversa se tivermos f de classe C^k, prove que f é um difeomorfismo de classe C^k.

Capítulo 3

Grau Topológico de Brouwer

Neste capítulo, iremos apresentar as definições de grau topológico, inicialmente para aplicações de classe C^1 e depois para uma aplicação contínua.

No que segue, consideraremos Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ e denotaremos por $C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ o espaço das funções a valores em $\mathbb{R}^N$, k vezes diferenciáveis em Ω, que são contínuas sobre $\bar{\Omega}$ e todas as derivadas até a ordem k são restrições de aplicações contínuas sobre $\bar{\Omega}$. Este espaço será munido da topologia usual.

3.1 Grau Topológico para Aplicações de Classe C^1

Nesta seção, definiremos o Grau Topológico para o caso regular, ou seja, para uma aplicação de classe C^1.

Definição 3.1. *Um ponto $a \in \mathbb{R}^m$ é dito ponto de fronteira de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ quando toda bola com centro a possui pontos de X e do complementar de X. Denotaremos por ∂X o conjunto dos pontos de fronteira de X.*

Sejam $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N), S = \{x \in \Omega; J_\varphi(x) = 0\}$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cap \varphi(S)$. Observemos que $\varphi^{-1}(b)$ é um conjunto limitado (pois $\varphi^{-1}(b) \subset \bar{\Omega}$ e $\bar{\Omega}$ é limitado) e é fechado (já que é a imagem inversa do conjunto fechado $\{b\}$ pela aplicação contínua φ). Logo, $\varphi^{-1}(b)$ é compacto.

Dado $\xi \in \varphi^{-1}(b)$, temos $J_\varphi(\xi) \neq 0$, pois $b \in \varphi(S)$. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe $r_\xi > 0$ tal que

$$\varphi|_{B_{r_\xi}(\xi)} : B_{r_\xi}(\xi) \to \varphi(B_{r_\xi}(\xi))$$

é um difeomorfismo. Notemos que

$$B_{r_\xi}(\xi) \cap \varphi^{-1}(b) = \{\xi\},$$

visto que $\xi \in B_{r_\xi}(\xi), \varphi(\xi) = b$ e $\varphi|_{B_{r_\xi}(\xi)}$ é uma bijeção.

Por outro lado,

$$\varphi^{-1}(b) \subset \bigcup_{\xi \in \varphi^{-1}(b)} B_{r_\xi}(\xi).$$

Sendo $\varphi^{-1}(b)$ compacto e usando o Teorema de Borel-Lebesgue, podemos afirmar que existem $\xi_1, ..., \xi_k \in \varphi^{-1}(b)$ satisfazendo

$$\varphi^{-1}(b) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{r_{\xi_i}}(\xi_i).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(b) &\subset \left[\bigcup_{i=1}^{k} B_{r_{\xi_i}}(\xi_i)\right] \bigcap \varphi^{-1}(b) \\ &= \bigcup_{i=1}^{k} \left[B_{r_{\xi_i}}(\xi_i) \cap \varphi^{-1}(b)\right] \\ &= \bigcup_{i=1}^{k} \{\xi_i\} \\ &= \{\xi_1, ..., \xi_k\}. \end{aligned}$$

Assim, $\varphi^{-1}(b) \subset \{\xi_1, ..., \xi_k\}$ e $J_\varphi(\xi_i) \neq 0$, para todo $i = 1, ..., k$.

Pelo que fizemos acima, fica bem posta a seguinte definição, a qual é a definição de Grau Topolóligo de Brouwer para a caso regular.

Definição 3.2. *Sejam $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cap \varphi(S)$. Definimos o Grau Topológico de Brouwer da aplicação φ relativamente a Ω no ponto b, denotado por $d(\varphi, \Omega, b)$, como sendo o número inteiro*

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{\xi \in \varphi^{-1}(b)} sgn(J_\varphi(\xi)),$$

onde $sgn(t) = 1$, se $t > 1$, e $sgn(t) = -1$, se $t < 0$.

Exemplo 3.1. *Sejam $\Omega = (-1, 1)$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ a função dada por $\varphi(x) = x^2 - \xi^2$, para algum $0 < \xi < 1$. Encontre $d(\varphi, \Omega, 0)$.*

Solução: Notemos que $\partial\Omega = \{-1, 1\}$. Além disso, $\varphi'(x) = 2x$. Então,

$$S = \{x \in \Omega; J_\varphi(x) = 0\} = \{0\}.$$

Logo,

$$\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S) = \{-\xi^2, 1 - \xi^2\},$$

o que implica

$$0 \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S).$$

Daí,

$$\varphi^{-1}(0) = \{x \in \Omega; \varphi(x) = 0\} = \{-\xi, \xi\}.$$

Observemos que

$$\varphi^{'}(\xi) = 2\xi \quad \text{e} \quad \varphi^{'}(\xi) = -2\xi.$$

Portanto,

$$d(\varphi, \Omega, 0) = \sum_{\xi \in \varphi^{-1}(0)} sgn(J_\varphi(\xi)) = (+1) + (-1) = 0.$$

Exemplo 3.2. *Consideremos a aplicação $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(x, y) = (sen\ \ x, cos\ \ y)$, onde $\Omega = \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \subset \mathbb{R}^2$. Encontre $d(\varphi, \Omega, (1/2, 1/2))$.*

Solução: Seja $\varphi(x, y) = (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y))$,

onde

$$\varphi_1(x, y) = sen\ \ x \quad \text{e} \quad \varphi_2(x, y) = cos\ \ y.$$

Notemos que

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = cos\ \ x, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = 0, \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0 \text{ e } \tfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} = -sen\ \ y.$$

Logo,

$$\varphi^{'}(x, y) = \begin{bmatrix} cos\ \ x & 0 \\ 0 & -sen\ \ y \end{bmatrix}.$$

Temos

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S).$$

Além disso,

$$\varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \varphi(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\} = \left\{\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)\right\}.$$

Assim,

$$d(\varphi, \Omega, (1/2, 1/2)) = sngJ_\varphi(\pi/6, \pi/3) = sng \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = -1.$$

Agora vamos ver a definição de grau topológico por meio de integrais. Sejam $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cap \varphi(S)$. Consideremos $\varphi^{-1}(b) = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k\}$. Então, $J_\varphi(\xi_i) \neq 0, \forall i \in \{1, 2, ..., k\}$. Pelo Teorema da Função Inversa, existe $\epsilon > 0$ e vizinhanças $B_\epsilon(b)$ de b e $\mathcal{U}_i$ de ξ_i, com $i = 1, 2, ..., k$, tais que

$$\varphi|_{\mathcal{U}_i} : \mathcal{U}_i \to B_\epsilon(b) = \varphi(\mathcal{U}_i)$$

é um difeomorfismo. Consideremos uma aplicação $J_\epsilon \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tal que

$$\text{supt } J_\epsilon \subset B_\epsilon(b) \text{ e } \int_{\mathbb{R}^N} J_\epsilon(x)dx = 1,$$

a qual existe conforme visto a Seção 2.4. Definamos

$$I_\epsilon = \int_{\bar{\Omega}} J_\epsilon(x) J_\varphi(x) dx.$$

Logo,

$$I_\epsilon = \int_A J_\epsilon(x) J_\varphi(x) dx,$$

onde $A = \{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\}$. Podemos escolher $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \emptyset$, para $i \neq j$ e $i, j \in \{1, 2, ..., k\}$. Desta forma,

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathcal{U}_i} J_\epsilon(\varphi_i(x)) J_{\varphi_i}(x) dx,$$

onde $\varphi_i = \varphi|_{\mathcal{U}_i}$ com $1 \leq i \leq k$. Desde que $\varphi(\mathcal{U}_i) = B_\epsilon(b)$, temos $\mathcal{U}_i = \varphi^{-1}(B_\epsilon(b))$. Assim,

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{\varphi^{-1}(B_\epsilon(b))} J_\epsilon(\varphi_i(x)) J_{\varphi_i}(x) dx.$$

Pelo Teorema de Mudança de Variáveis, ficamos com

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \int_{B_\epsilon(b)} J_\epsilon(x) J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x)) |J_{\varphi_i^{-1}}(x)| dx.$$

Usando a Regra da Cadeia, obtemos

$$|J_{\varphi_i^{-1}}(x)| = \frac{1}{|J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))|}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= \sum_{i=1}^{k} \int_{B_\epsilon(b)} J_\epsilon(x) sgn\left[J_{\varphi_i}\left(\varphi_i^{-1}(x)\right)\right] dx \\ &= \sum_{i=1}^{k} sgn\left[J_{\varphi_i}\left(\varphi_i^{-1}(x)\right)\right] \int_{B_\epsilon(b)} J_\epsilon(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^{k} sgn\left[J_\varphi(\xi_i)\right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$I_\epsilon = d(\varphi, \Omega, b).$$

O número I_ϵ é denominado a Forma Integral do Grau Topológico de Brouwer de φ com relação a Ω no ponto b.

Usando um procedimento análogo ao que utilizamos para definir I_ϵ, podemos mostrar o

Teorema 3.1. *Sejam $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cap \varphi(S)$. Então,*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0).$$

3.2 Grau Topológico para Aplicações Contínuas

Vamos agora construir a definição de grau topológico para aplicações contínuas. Começaremos com a seguinte definição:

Definição 3.3. *Dados um ponto $a \in \mathbb{R}^N$ e um conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$, definimos a distância entre a e X, denotada por $\rho(a, X)$, como sendo*

$$\rho(a, X) = \inf\{\|a - x\|; x \in X\}.$$

Teorema 3.2. *Sejam $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cap \varphi(S)$. Então, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de b pela topologia de $C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que para toda $\psi \in \mathcal{U}$, temos:*
(i) $b \notin \psi(\partial\Omega)$;
(ii) $x \in \psi^{-1}(b) \Rightarrow J_\varphi(x) \neq 0$;
(iii) $d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b)$.

Demonstração: Provaremos apenas o item (i). Seja $r = \rho(b, \varphi(\partial\Omega))$. Como $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, então $r > 0$. Definamos o conjunto

$$\mathcal{U} = \{\psi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N); \|\varphi - \psi\|_{C^1} < \tfrac{r}{2}\}.$$

Claramente, $\mathcal{U}$ é uma vizinhança de φ em $C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Dada $\psi \in \mathcal{U}$, temos

$$\|\varphi - \psi\|_{C^1} < \tfrac{r}{2}.$$

Daí,

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < \tfrac{r}{2}, \; \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Suponhamos, por contradição, que exite $a \in \partial\Omega$ tal que $\psi(a) = b$. Então,

$$|\varphi(a) - b| = |\varphi(a) - \psi(a)| < \tfrac{r}{2},$$

donde $\rho(b, \varphi(\partial\Omega)) \leq \frac{r}{2}$, o que é um absurdo! Assim, devemos ter $\psi(x) \neq b, \forall x \in \partial\Omega$ e podemos concluir que $b \notin \psi(\partial\Omega)$, provando (i).

■

Observação 3.1. *O item (iii) afirma que o grau topológico de Brouwer é localmente constante na topologia de $C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.*

Teorema 3.3. *Sejam $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e b_1, b_2 pontos de $\mathbb{R}^N$ que não pertencem a $\varphi(\partial\Omega) \cap \varphi(S)$. Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$, então*

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

Devido a sua complexidade, não faremos a demonstração deste teorema aqui.

Definição 3.4. *Sejam* $\varphi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ *e* $b \in \varphi(S)$. *Consideremos* C_b *a componente conexa de* b *em* $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$. *Pelo Teorema de Sard,* $\varphi(S)$ *tem medida nula. Logo,* C_b *possui pontos de* $\mathbb{R}^N$ *que não pertencem a* $\varphi(S)$. *Pelo Teorema 3.3, para todo* $x, y \in C_b \backslash \varphi(S)$, *temos*

$$d(\varphi, \Omega, x) = d(\varphi, \Omega, y).$$

Definimos o grau topológico de Brouwer de φ *em relação a* Ω *em* b *como*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, x), \quad x \in C_b \backslash \varphi(S).$$

Teorema 3.4. *Sejam* $\varphi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *e* $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. *Então, existe uma vizinhança* $\mathcal{U}$ *de* b *pela topologia de* $C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *tal que, para toda* $\psi \in \mathcal{U}$,

(i) $b \notin \psi(\partial\Omega)$;
(ii) $d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b)$.

Demonstração: Temos duas possibilidades a considerar. Se $b \notin \varphi(S)$, o resultado segue diretamente do Teorema 3.2. Suponhamos agora $b \in \varphi(S)$. Como $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, temos

$$r = \rho(\{b\}, \varphi(\partial\Omega)) > 0.$$

Afirmação: Existe $b_1 \in [\varphi(S)]^C$ tal que

$$|b_1 - b| < \frac{r}{4}.$$

De fato, assumamos que a **Afirmação** não ocorre. Então, para todo $x \in [\varphi(S)]^C$, temos

$$|x - b| \geq \frac{r}{4}.$$

Em outras palavras, dado $x \in [\varphi(S)]^C$, temos

$$x \in [B_{\frac{r}{4}}(b)]^C,$$

o que implica

$$[\varphi(S)]^C \subset [B_{\frac{r}{4}}(b)]^C,$$

Assim,

$$B_{\frac{r}{4}}(b) \subset \varphi(S).$$

Daí,

$$0 < \mu(B_{\frac{r}{4}}(b)) \leq \mu(\varphi(S)),$$

de onde segue que

$$\mu(\varphi(S)) > 0,$$

contradizendo o Teorema de Sard.

Portanto, existe $b_1 \notin [\varphi(S)]^C$ tal que

$$b_1 \in B_{\frac{r}{4}}(b).$$

Além disso, temos

$$B_{\frac{r}{4}}(b) \subset \mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial(\Omega)).$$

Logo, b e b_1 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial(\Omega))$. Usando a Definição 3.4,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b_1). \tag{3.2.1}$$

Observemos ainda que $b_1 \notin \varphi(\partial\Omega) \cap \varphi(S)$, pois $b_1 \in \varphi(S)$ e $b_1 \in B_{\frac{r}{4}}(b) \subset \mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$. Pelo Teorema 3.2, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de φ em $C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que, para toda $\psi \in \mathcal{U}$,

$$b_1 \notin \psi(\partial\Omega) \cap \psi(S) \quad e \quad d(\psi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_1). \tag{3.2.2}$$

Notemos que

$$\rho(b, \psi(\partial\Omega)) \geq \tfrac{r}{2}, \forall \psi \in \mathcal{U}.$$

Então,

$$B_{\frac{r}{4}}(b) \subset \mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega), \forall \psi \in \mathcal{U}.$$

Desta forma, b e b_1 estão na mesma compnente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega), \forall \psi \in \mathcal{U}$. Assim,

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1). \tag{3.2.3}$$

Portanto, de (3.2.1), (3.2.2) e (3.2.3),

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b).$$

■

Teorema 3.5. *(Invariância por homotopia de classe C^2) Seja $H(x,t) \in C^2(\bar{\Omega} \times [0,1], \mathbb{R}^N)$. Se $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1], \mathbb{R}^N)$, então existe um número real C tal que*

$$d(H(.,t), \Omega, b) = C, \forall t \in [0,1].$$

Demonstração: Por hipótese, H e $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ são contínuas no compacto $\bar{\Omega}\times[0,1]$. Então, H e $\dfrac{\partial H}{\partial x}$ são uniformemente contínuas em $\bar{\Omega}\times[0,1]$. Logo, fixado $\tau\in[0,1]$, para todo $\epsilon>0$ existe $\alpha>0$ tal que

$$|t-\tau|<\alpha\Rightarrow\|H(.,t)-H(.,\tau)\|_{C^1}<\epsilon,\forall t\in[0,1].$$

Para $t\approx\tau$, pelo Teorema 3.4

$$d(H(.,t),\Omega,b)=d(H(.,\tau),\Omega,b).$$

Daí, a função $t\to d(H(.,t),\Omega,b)$ é localmente constante em $[0,1]$. Sendo $[0,1]$ conexo, podemos concluir do Exercício ? que $t\to d(H(.,t),\Omega,b)$ é constante em $[0,1]$.

■

Sejam $\varphi\in C(\bar{\Omega},\mathbb{R}^N)$, $b\notin\varphi(\partial\Omega)$ e $r=\rho(b,\varphi(\partial\Omega))>0$. Pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass, existe $\psi\in C^2(\bar{\Omega},\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|\varphi-\psi\|_\infty<\frac{r}{2}.$$

Para essa tal ψ temos $b\notin\psi(\partial\Omega)$ e daí $d(\psi,\Omega,b)$ está bem definido. Mostraremos agora que o grau não depende da escolha da ψ, ou seja, se $\psi_1,\psi_2\in C^2(\bar{\Omega},\mathbb{R}^N)$ com

$$\|\varphi-\psi_1\|_\infty<\frac{r}{2}\text{ e }\|\varphi-\psi_2\|_\infty<\frac{r}{2},$$

então

$$d(\psi_1,\Omega,b)=d(\psi_2,\Omega,b).$$

De fato, seja $H:\bar{\Omega}\times[0,1]\to\mathbb{R}^N$ a homotopia dada por

$$H(x,t)=t\psi_1(x)+(1-t)\psi_2(x).$$

Temos $H\in C^2(\bar{\Omega}\times[0,1],\mathbb{R}^N)$. Além disso, $b\notin H(\partial\Omega\times[0,1])$. Para provar isto, vemos inicialmente que, para cada $t\in[0,1]$ fixado, temos

$$|H(x,t)-\varphi(x)|<\frac{r}{2},\forall\in\bar{\Omega}.$$

Logo, se $b\in H(\partial\Omega\times[0,1])$, então existem $x_0\in\partial\Omega$ e $t_0\in[0,1]$ tais que $H(x_0,t_0)=b$. Daí,

$$|b-\varphi(x_0)|=|H(x_0,t_0)-\varphi(x_0)|<\frac{r}{2},$$

de onde segue-se que

$$r = dist\{b, \varphi(\partial\Omega)\} \leq \frac{r}{2},$$

o que é um absurdo! Assim, $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Pelo Teorema 3.5, existe um número real C satisfazendo

$$d(H(.,t), \Omega, b) = constante, \forall t \in [0,1].$$

Em particular,

$$d(H(.,0), \Omega, b) = d(H(.,1), \Omega, b),$$

isto é,

$$d(\psi_1, \Omega, b) = d(\psi_2, \Omega, b).$$

Com isso, fica bem posta a definição de grau topológico de Brouwer para funções contínuas, que é a seguinte:

Definição 3.5. *Definimos o grau topológico de Brouwer de $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ relativamente a Ω em $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ como sendo*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b),$$

para toda $\psi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$\|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{r}{2}.$$

onde $r = \rho(b, \varphi(\partial\Omega))$.

3.3 Alguns Resultados Envolvendo Grau Topológico

O primeiro resultado decorrente da definição dada acima é o seguinte:

Teorema 3.6. *Se $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, então*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0).$$

Demonstração: Por definição,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b), \forall \psi \in \mathcal{U}.$$

para toda $\psi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ verificando

$$\|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{r}{2}. \tag{3.3.4}$$

Fixemos $\psi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ satisfazendo (3.3.4). Dado $x \in \bar{\Omega}$, temos

$$\varphi(x) = b \Leftrightarrow \varphi(x) - b = 0 \Leftrightarrow (\varphi - b) = 0,$$

ou seja,

$$x \in \varphi^{-1}(b) \Leftrightarrow x \in (\varphi - b)^{-1}(0).$$

Como $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, então $0 \in (\varphi - b)^{-1}(\partial\Omega)$. Além disso,

$$\|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{r}{2},$$

onde

$$r = \rho(0, (\varphi - b)) = \rho(b, \varphi(\partial\Omega)) > 0.$$

Desta forma,

$$\|(\psi - b) - (\varphi - b)\|_\infty < \frac{r}{2}.$$

Assim,

$$d(\varphi - b, \Omega, b) = d(\psi - b, \Omega, b).$$

Observemos que se $b \in \psi(\partial\Omega)$, então existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $\psi(x_0) = b$. Por outro lado, temos

$$|\psi(x_0) - \varphi(x_0)| < \frac{r}{2},$$

isto é,

$$|b - \varphi(x_0)| < \frac{r}{2},$$

de onde segue-se que

$$r = dist\{b, \varphi(\Omega)\} \leq \frac{r}{2},$$

o que é um absurdo! Logo, devemos ter

$$b \notin \psi(\partial\Omega).$$

Consideremos agora $b_1 \in \psi(S)$ tal que b_1 está na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \psi(\partial\Omega)$ que contém b. Assim,

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1) = d(\psi - b, \Omega, 0).$$

Notemos que

$$\|(\psi - b) - (\psi - b_1)\|_\infty = \|b - b_1\|_\infty = |b - b_1|.$$

Tomemos $\epsilon > 0$ de modo que $\epsilon < \frac{r}{2}$ e escolhamos b_1 suficientemente próximo de b de maneira que

$$|b - b_1| < \epsilon.$$

Daí,

$$\|(\psi - b) - (\psi - b_1)\|_\infty < \frac{r}{2},$$

o que implica

$$d(\psi - b, \Omega, 0) = d(\psi - b_1, \Omega, 0).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(\varphi, \Omega, b) &= d(\psi, \Omega, b) \\ &= d(\psi, \Omega, b_1) \\ &= d(\psi - b_1, \Omega, 0) \\ &= d(\psi - b, \Omega, 0) = d(\psi - b, \Omega, 0), \end{aligned}$$

ou seja,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi - b, \Omega, 0).$$

■

O próximo resultado trata das principais propriedades do grau.

Teorema 3.7. *(1) Continuidade: Para $\varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, existe uma vizinhança V de φ em $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que, $\forall \psi \in V$, temos:*

(i) $b \notin \psi(\partial\Omega)$;
(ii) $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$;

(2) Invariância do grau por homotopia: Sejam $H \in C(\Omega \times [0,1], \mathbb{R}^N)$ e $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$, então

$$d(H(.,t), \Omega, b) = \textit{constante, para todo } t \in [0,1].$$

Demonstração: Vamos mostrar (1). Sejam $r = \rho(b, \varphi(\partial\Omega))$ e $V = \{H \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N); \|\varphi - H\|_\infty < \dfrac{r}{4}\}$. Se $H \in V$, então $b \notin H(\partial\Omega)$ e $r' = \rho(b, H(\partial\Omega)) \geq \dfrac{3r}{4}$. De fato, para todo $x \in \partial\Omega$,

$$\begin{aligned} |b - H(x)| &= |b - \varphi(x) + \varphi(x) - H(x)| \\ &\geq |b - \varphi(x)| - |\varphi(x) - H(x)| \\ &\geq r - |\varphi(x) - H(x)|, \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$|\varphi(x) - H(x)| < \frac{r}{4}, \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Assim,

$$|b - H(x)| \geq r - \frac{r}{4} = \frac{3r}{4}, \forall x \in \partial\Omega,$$

implicando em

$$r' = dist\{b, H(\partial\Omega)\} \geq \frac{3r}{4},$$

mostrando que $b \in H(\partial\Omega)$.

Agora, fixemos $\psi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ satisfazendo $\|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{r}{8}$, que existe pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass. Usando a definição do grau topológico para aplicações contínuas, temos

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b).$$

Para $x \in \bar{\Omega}$, segue-se que

$$\begin{aligned} |\psi(x) - H(x)| &\leq |\psi(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - H(x)| \\ &< \frac{r}{8} + \frac{r}{8} \\ &= \frac{3r}{8}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\psi - H\|_\infty \leq \frac{3r}{8} \leq \frac{r'}{2}.$$

Novamente pela definição de grau,

$$d(H, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b).$$

Portanto,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(H, \Omega, b), \forall H \in V.$$

Provemos (2). Fixemos $\tau \in [0,1]$. Como H é uniformemente contínua em $\bar{\Omega} \times [0,1]$, então dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in [0,1], |t - \tau| < \delta \Rightarrow \|H(.,t) - H(.,\tau)\| < \epsilon.$$

Escolhendo ϵ suficientemente pequeno de modo que $H(.,t), H(.,\tau) \in V$ e usando o Teorema (3.7)(1), temos

$$d(H(.,t), \Omega, b) = d(H(.,\tau), \Omega, b),$$

ou seja, a função $t \mapsto d(H(.,t),\Omega,b)$ é localmente constante. Sendo $[0,1]$ conexo, segue que a função $t \mapsto d(H(.,t),\Omega,b)$ é constante.

$\blacksquare$

A seguir veremos algumas consequências das propriedades do grau topológico de Brouwer.

Corolário 3.1. *Seja $I : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ a aplicação dada por $I(x) = x$. Então,*

$$d(I,\Omega,b) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in \Omega \\ 0, & se \quad x \notin \bar{\Omega} \end{cases}.$$

Demonstração: Seja $b \in \Omega$. Então,

$$d(I,\Omega,b) = \sum_{\xi \in \varphi^{-1}(b)} sgn(J_\varphi(\xi)) = sgnJ_I(b) = sng \quad detI = 1,$$

ou seja,

$$d(I,\Omega,b) = 1.$$

Suponhamos agora que $b \notin \bar{\Omega}$. Seja $r = \rho(b,\bar{\Omega})$. Tomemos $\epsilon = \frac{r}{2} > 0$. Então,

$$A = \{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\} = \emptyset.$$

De fato, se existisse $x_0 \in \Omega$ tal que

$$|\varphi(x_0) - b| < \epsilon,$$

teríamos

$$r \leq |\varphi(x_0) - b| < \epsilon = \frac{r}{2},$$

o que é um absurdo! Assim, $A = \emptyset$. Usando a definição de grau topológico por integrais, temos

$$d(I,\Omega,b) = \sum_{\xi \in \varphi^{-1}(b)} sgn(J_\varphi(\xi)) = \int_A J_\epsilon(I(x))J_I(x)dx = 0,$$

isto é,

$$d(I,\Omega,b) = 0.$$

$\blacksquare$

Corolário 3.2. *Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, então existe $x_1 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_1) = b$.*

Demonstração: Sejam $\varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N), b \notin \varphi(\partial\Omega)$ e $r = \rho(b, \varphi(\partial\Omega)) > 0$.

Seja $\psi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|(\psi - b) - (\psi - b_1)\|_\infty < \frac{r}{2},$$

que existe pelo Teorema de Aproximação de Weierstress. Então,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b).$$

Escolhendo b_1 suficientemente próximo de b de modo que $b_1 \in C_b \backslash \psi(\Omega)$, temos

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1).$$

Sendo $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, por hipótese, devemos ter $d(\psi, \Omega, b_1) \neq 0$. Logo, pela definição de grau topológico, caso regular, $\psi^{-1}(b_1) \neq \emptyset$. Daí, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\psi(x_0) = b_1$, implicando que

$$\psi(\bar{\Omega}) \cup \{b_1\} \neq \emptyset. \tag{3.3.5}$$

Afirmamos que $b \in \varphi(S)$. De fato, suponhamos que $b \notin \varphi(S)$ e seja $\tilde{r} = \rho(b, \varphi(\bar{\Omega})) > 0$. Fixemos $\delta > 0$ de modo que

$$0 < \delta < \frac{1}{2}\rho(b, \partial\left(\varphi(\bar{\Omega})\right))$$

e consideremos o conjunto

$$\left(\varphi(\bar{\Omega})\right)_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N; \rho(x, \varphi(\bar{\Omega})) < \delta\},$$

que é uma δ-vizinhança de $\varphi(\bar{\Omega})$. Logo,

$$\psi(\bar{\Omega}) \subset \left(\varphi(\bar{\Omega})\right)_\delta,$$

o que implica

$$\psi(\bar{\Omega}) \cap \{b_1\} = \emptyset,$$

contrariando (3.3.5).

Portanto, $b \in \varphi(S)$ e podemos concluir que existe $x_1 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_1) = b$.

$\blacksquare$

3.4 Exercícios

1. O Grau Topológico é constante, com respeito a b, em toda componente conexa de $\mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$.

2. Seja $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ e $b \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$, onde $f \in C(O\bar{m}ega, \mathbb{R}^n)$ e $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Então,

$$d(f, \Omega, b) = d(f, \Omega_1, b) + d(f, \Omega_2, b).$$

3. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(a).f(b) \neq 0$. Mostre que

$$d(f, (a, b), 0) = \frac{1}{2}[sgn \quad (f(b)) - sgn \quad (f(a))].$$

4. Se $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin f(\bar{\Omega})$, então

$$d(f, \Omega, b) = 0.$$

5. Sejam $f \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin f(\bar{\Omega})$. Se $d(f, \Omega, b) \neq 0$, então $f(\Omega)$ é uma vizinhança de b.

6. Se $f : B[0, R] \to B[0, R]$ é uma aplicação contínua tal que $< f(x), x > \geq 0$, para todo $x \in \partial B[0, R]$, então existe $x_0 \in B(0, R)$ tal que $f(x_0) = 0$.

7. Se $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação contínua satisfazendo

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{< g(x), x >}{\|x\|} = +\infty.$$

Mostre que dado $y \in \mathbb{R}^m$ existe $x \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$g(x) = y.$$

Capítulo 4

O Teorema de Poincaré-Miranda

4.1 Uma Genenalização do Teorema de Miranda

Neste capítulo, enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Poincaré-Miranda. Este resultado generaliza o Teorema de Miranda, o qual pode ser enunciado da seguinte forma:

Teorema 4.1 (Teorema de Miranda)**.** *Seja* $P = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^N; |x_i| \leq L,$ *para* $1 \leq i \leq n\}$ *e suponhamos que a aplicação* $f = (f_1, f_2, ..., f_n) : P \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *é contínua, que* $F(x) \neq \theta = (0, 0, ..., 0)$ *para* $x \in \partial P$*, e*

(i) $f_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, -L, x_{i+1}, ..., x_n) \geq 0$*, para* $1 \leq i \leq n$*,*

e

(ii) $f_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, L, x_{i+1}, ..., x_n) \leq 0$*, para* $1 \leq i \leq n$*.*

Então, existe $x_0 \in P$ *tal que* $f(x_0) = \theta$*.*

A demonstração do Teorema de Miranda é análoga ao Teorema de Poicaré-Miranda. Por isso, provaremos apenas este último.

Teorema 4.2 (Teorema de Poincaré-Miranda)**.** *Toda aplicação contínua* $f : P \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$*, de um bloco fechado N-dimensional* $P = \prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i], a_i \neq b_i$*, com faces*

$$P_i^- = \{x \in P; x_i = a_i\} \quad e \quad P_i^+ = \{x \in P; x_i = b_i\},\ i = 1, 2, ..., N,$$

tal que

$$f_i(x) \leq 0, x \in P_i^-, \quad e \quad f_i(x) \geq 0, x \in P_i^+, 1 \leq x \leq N,$$

tem uma raiz em P.

<u>Demonstração</u>: Se $f = (f_1, ..., f_N)$ possui uma raiz em $\partial P = \bigcup_{i=1}^{N}(P_i^+ \cup P_i^-)$, o resultado está provado. Suponhamos que f não possui raiz em ∂P, ou seja,

$$f(x) \neq 0, \forall x \in \partial P.$$

Definamos a homotopia

$$\begin{array}{rcl} H : P \times [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R}^N \\ (x,t) & \mapsto & H(x,t) = (H_1(x,t), ..., H_N(x,t)), \end{array}$$

onde

$$H_i(x,t) = (1-t)\left(x_i - \frac{a_i + b_i}{2}\right) + tf_i(x), 1 \leq i \leq N.$$

Notemos que

$$H(x,1) = f(x) \neq 0, \forall x \in \partial P.$$

Seja $t \in [0,1)$. Se $x \in \partial P$, então $x \in P_i^-$ ou $x \in P_i^+$, para algum $1 \leq i \leq N$. Suponhamos que $x \in P_i^-$. Logo, $x_i = a_i$. Daí,

$$\begin{array}{rcl} H_i(x,t) & = & (1-t)\left(a_i - \dfrac{a_i + b_i}{2}\right) + tf_i(x) \\ & = & (1-t)\left(\dfrac{a_i - b_i}{2}\right) + tf_i(x). \end{array}$$

Usando o fato de que $a_i < b_i$ e $f_i(x) \leq 0$, segue-se que

$$H_i(x,t) < 0.$$

Analogamente, para $x \in P_i^+$, sabendo que $x_i = b_i$ e $f_i(x) \geq 0$, temos:

$$H_i(x,t) = (1-t)\left(\frac{b_i - a_i}{2}\right) + tf_i(x) > 0.$$

Assim, dado $t \in [0,1]$,

$$H(x,t) \neq 0, \forall x \in \partial P,$$

implicando que

$$0 \notin H(\partial P \times [0,1]).$$

Observando que

$$H(.,0) = I - \frac{a+b}{2}, a = (a_1, ..., a_n) \text{ e } b = (b_1, ..., b_N),$$

e usando o Teorema 3.7 e o Teorema 3.6, temos

$$\begin{aligned} d(f, intP, 0) &= d(H(.,1), intP, 0) \\ &= d(H(.,0), intP, 0) \\ &= d(I - \frac{a+b}{2}, intP, 0) \\ &= d\left(I, intP, \frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

Pelo Corolário 3.1,

$$d(f, intP, 0) = 1.$$

Segue-se do Corolário 3.2 que existe $x_0 \in intP$ tal que

$$f(x_0) = 0,$$

concluindo o teorema.

■

4.2 O Teorema de Poincaré-Miranda em Dimensão Infinita

Uma pergunta natural de se fazer é: o Teorema de Miranda vale em espaços de dimensão infinita? A resposta é sim. Veremos a seguir um exemplo que garante a validade desta resposta.

Seja ℓ^2 o seguinte conjunto:

$$\ell^2 = \left\{ x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}; x_i \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty \right\}.$$

Definamos em ℓ^2 as operações de adição e multiplicação por escalar da seguinte forma:

$$x + y = (x_i + y_i)$$

e

$$\lambda x = (\lambda x_i),$$

onde $x, y \in \ell^2$, com $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. O conjunto ℓ^2 com as operações acima é um espaço vetorial (real).

Consideremos agora a função $\|.\| : \ell^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, x = (x_i).$$

A função $\|.\|$ é uma norma em ℓ^2 e, assim, ℓ^2 munido dessa norma é um espaço normado.

Podemos verificar que ℓ^2 é um espaço vetorial de dimensão infinita. A seguir, veremos a validade de um resultado análogo ao Teorema de Poincaré-Miranda, mas em ℓ^2.

Teorema 4.3. *Seja $y = (y_i) \in \ell^2, L = (l_i) \in \ell^2, l_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}$, $\Omega = \{x \in \ell^2; |x_i - y_i| \leq l_i, \forall i \in \mathbb{N}\}$ e $f : \Omega \to \ell^2$ uma aplicação contínua. Consideremos ainda*

$$F_i^+ = \{x \in \Omega; x_i = y_i + l_i\}$$

e

$$F_i^- = \{x \in \Omega; x_i = y_i - l_i\},$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Se

$$f_i(x).f_i(z) \leq 0, \forall x \in F_i^+, \forall z \in F_i^-,$$

para qualquer $i \in \mathbb{N}$, então existe $x_0 \in \Omega$ satisfazendo $f(x_0) = 0$.

Demonstração: Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos a aplicação $g_k : \Omega \to \ell^2$ definida por

$$g_k(x) = (f_1(x_1, x_2, ..., x_k, ...), ..., f_k(x_1, x_2, ..., x_k, ...), ...) .$$

Como Ω é compacto e f é contínua, então $f(\Omega)$ é compacto. Assim, dados $\epsilon > 0$ e $x \in \Omega$ podemos afirmar que existe $v = (v_1, v_2, ...) \in \ell^2$ tal que

$$\|f(x) - v\| \leq \epsilon.$$

Além disso, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$k > k_1 \Rightarrow \sum_{j=k+1}^{+\infty} v_j \leq \epsilon.$$

Logo, para $k > k_1$, temos

$$\begin{aligned} \|f(x) - g_k(x)\| &= \|(0, 0, ..., 0, f_{k+1}(x), f_{k+2}, ...)\| \\ &\leq \|f(x) - v\| + \|(0, 0, ..., 0, v_{k+1}, v_{k+2}, ...)\| \\ &\leq 2\epsilon, \end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$.

Agora, fixemos $k \in \mathbb{N}$. Definamos

$$\Omega_k = [y_1 - l_1, y_1 + l_1] \times ... \times [y_k - l_k, y_k + l_k]$$

e

$$\begin{aligned} h_k : \Omega_k &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ x &\mapsto h_k(x) = (f_1(x_1, ..., x_k, ...), ..., f_k(x_1, ..., x_k, ...)). \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Poincaré-Miranda, existe $x^{(k)} \in \Omega_k$ tal que

$$h_k(x^{(k)}) = 0.$$

Seja

$$\tilde{x}^{(k)} = (x^k, y_{k+1}, y_{k+2}, ...).$$

Desta forma, $\tilde{x}^{(k)} \in \Omega$ e $g_k(\tilde{x}^{(k)}) = 0$. Daí,

$$\|f(\tilde{x}^{(k)})\| = \|f(\tilde{x}^{(k)}) - g_k(\tilde{x}^{(k)})\| \leq 2\epsilon,$$

de onde segue-se que

$$\lim_{k \to} f(\tilde{x}^{(k)}) = 0.$$

Por outro lado, $(\tilde{x}^{(k)})$ é uma sequência em Ω e Ω é compacto. Logo, passando a uma subsequência se necessário, temos $\tilde{x}^{(k)} \to x_0 \in \Omega$. Sendo f contínua, podemos concluir que

$$\lim_{k \to +\infty} f(\tilde{x}^{(k)}) = f(x_0).$$

Pela unicidade do limite, $f(x_0) = 0$.

■

4.3 Exercícios

1. Use uma sequência de passos análogos aos utilizados na demonstração do Teorema 4.2 (Teorema de Poincaré-Miranda) e prove o Teorema 4.1 (Teorema de Miranda).

2. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} 8x_2x_1 - 8x_1 - 1 = 0 \\ 2x_3x_2 - 4x_2 - 1 = 0 \\ 8x_4x_3 - 8x_3 - 1 = 0 \\ 2x_5x_4 - 4x_4 - 1 = 0 \end{cases}$$

no conjunto $P = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.
Mostre que o sistema tem pelo menos uma solução em P.

3.Sejam $L = (l_i) \in \ell^2, l_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}$, $\Omega = \{x \in \ell^2; |x_i| \leq l_i, \forall i \in \mathbb{N}\}$ e $g : \Omega \to \ell^2$ uma aplicação contínua satisfazendo

(i) $g_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, -l_i, x_{i+1}, ..., x_n) \geq 0$

(ii) $g_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, l_i, x_{i+1}, ..., x_n) \leq 0,$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Então, existe $x_0 \in P$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Bibliografia

[1] ALMEIDA O. B.; ALVES, C. O. **Teoria do Grau e Aplicações**. 2006. 124 p. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande.

[2] BERESTYCKI, H. **Methodes Topologiques et Problemes aux Limites non Lineaires**. 1975. 231 p. Tese [Doutorado em Matemática] L'Universite de Paris, Soutenue.

[3] CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Maringá: EUEM, 2009.

[4] DINCA, G.; MAWHIN J. **Brouwer Degree and Applications**. 2009.

[5] IDCZAK, D.; MAJEWSKI, M. A Generalization of the Poincaré - Miranda Theorem with an Application to the Controllability of Nonlinear Repetitive Process. **Asian Journal of Control**, v. 12, pp. 168 - 176, 2010.

[6] KREYSZIG, E. **Introductory Funcional Analysis with Applications**. New York: J. Wiley, 1978.

[7] KESAVAN, S. **Nonlinear Functional Analysis: A First Course**. New Delhi, Hindustan Book Agency: 2004.

[8] LIMA E. L. **Análise Real**. 11 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. v. 1

[9] LIMA E. L. **Análise Real**. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. v. 2

[10] LIMA E. L. **Curso de Análise**. 12 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. v. 1

[11] LIMA E. L. **Curso de Análise**. 11 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. v. 2

[12] MIRANDA, C. Un'osservazione su un Teorema di Brouwer. **Bollettino dell'Unione Matematica Italiana**, v. 3, pp. 5 - 7, 1940.

[13] SCHÄFER, U. **A Fixed Point Theorem Basead on Miranda**. Karlsruhe: Hindawi, 2007.

[14] SILVA, J. M.; MORAIS FILHO, D. C. **Soluções para uma Equação de Schrödinger Quasilinear**. 2012. 184 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande.

Índice