FAZENDO CONTAS COM A CPMF

por Alberto de Azevedo

§1. Introdução

O chamado imposto sobre o cheque foi criado em 13 de julho de 1993 com o nome de Imposto Provisório sobre a Movimentação e Transmissão de Valores, Créditos e Direitos de Natureza Financeira (IPMF). Em particular, por essa lei, para cada débito em conta corrente de pessoa física era cobrada uma taxa de 0,25% sobre o valor do débito. Decorridos 15 anos, o imposto mudou de nome, a taxa variou e houve períodos em que não houve imposto sobre o cheque. Em sua última vigência, de 1º de janeiro de 2004 a 31 de dezembro de 2007, ele era denominado Contribuição Provisória sobre Movimentação Financeira (CPMF) e a taxa era de 0,38%. O Congresso Nacional não renovou a vigência da CPMF para o período de 1º de janeiro de 2008 a 31 de dezembro de 2011, conforme havia proposto o governo.

O objetivo deste artigo não é discutir se a CPMF deve existir ou não. São inúmeros os argumentos tanto a favor como contra a existência da CPMF e a questão voltou a ser discutida no Congresso. Queremos apenas ilustrar como a CPMF torna complexas algumas questões envolvendo a movimentação financeira do cidadão que, sem ela, seriam triviais.

Como exemplo, vamos considerar o caso de três sócios que investiram numa construção civil visando um futuro empreendimento comercial. O sócio que investiu mais, que chamaremos de A, gastou $A =$ R$ 50 mil, o sócio que investiu menos, que chamaremos de C, gastou $C =$ R$ 15 mil e o terceiro sócio, que chamaremos de B, gastou $B =$ R$ 40 mil. A obra custou, portanto, R$ 105 mil. Conforme combinado, cada sócio arcaria com um terço das despesas, ou seja, com R$ 35 mil. Terminada a obra, só faltava acertar as contas.

Sem CPMF o acerto é trivial e, neste caso, os cálculos podem ser feitos até de cabeça: basta C enviar R$ 15 mil para A e R$ 5 mil para B que o acerto de contas estará feito.

Havendo CPMF, o acerto de contas é mais complicado. Como exemplo, vamos considerar o mesmo problema com CPMF e taxa de 0,38%. Além disso, vamos admitir que todos os sócios pagam suas contas emitindo cheques ou fazendo transferências eletrônicas. Assim sendo, quando A comprou um material ou pagou um serviço no valor de R$1.000,00, a rigor, fez uma despesa de R$ 1.003,80 visto que o banco além de debitar seu cheque de R$ 1.000,00 debitou também, automaticamente, R$ 3,80 correspondente ao imposto de 0,38% sobre R$1.000,00. Fato análogo vai ocorrer quando, no acerto de contas, um dos sócios enviar dinheiro para outro. Como determinar as quantias que devem ser enviadas para que haja um acerto de contas perfeito?

Existem fórmulas, de aspecto assustador para o contribuinte, que dão as quantias que devem ser trocadas entre os sócios, a fim de que haja um acerto de contas perfeito. Estas fórmulas envolvem A, B, C e a taxa da CPMF (vide §4).

§2. Acerto de contas entre dois sócios

Dois sócios investiram numa construção civil visando um futuro empreendimento comercial. O sócio que investiu mais, que chamaremos de A, gastou $A =$ R$ 80 mil enquanto o outro, que chamaremos de B, gastou $B =$ R$ 25 mil. A obra custou, portanto, R$ 105 mil. Conforme combinado, cada sócio arcaria com metade dos gastos, ou seja, R\$52.500,00.

Sem CPMF, para acertar as contas, o sócio B deve enviar R\$ 27.500,00 para A. Em termos algébricos, a quantia x que B deve enviar para A é obtida resolvendo a equação:

$$A - x = B + x$$

ou seja, $x = \dfrac{A-B}{2} = 27.500,00.$

$$\mathsf{A} \xleftarrow{x} \mathsf{B}$$

Formalmente, também podemos acertar as contas fazendo com que A envie recursos para B. Seja x a quantia que A deve enviar para B. Neste caso, temos que resolver a equação $A+x = B-x$ cuja solução é $-27.500,00$. O valor negativo para x mostra que, ao invés de A enviar recursos para B, é B que deve enviar recursos para A.

Vamos agora supor que existe CPMF com taxa de 0,38%. Neste caso, A gastou, de fato A mais 0,38% de A, isto é, 1,0038A. Para simplificar a notação, doravante, indicaremos o número 1,0038 pela letra grega λ. Analogamente, B gastou λB e quando B enviar x para A terá, a rigor, feito uma despesa adicional de λx. Resulta que x é solução da equação

$$\lambda A - \lambda x = \lambda B + \lambda x$$

ou seja, $x = \frac{\lambda}{(1+\lambda)}(A-B) = 27.552{,}15$. Com esta remessa, A terá gasto 1,0038 $\times$ 80.000 - 27.552,15 = 52.751,85 e B terá gasto 1,0038 $\times$ 25.000,00 + 1,0038 $\times$ 27.552,15 = 52.751,85. Conclusão: o acerto de contas estará feito.

No caso de dois sócios, o acerto de contas também pode ser feito fazendo com que A mande recursos para B. A quantia x que A deve enviar para B é a solução da equação

$$\lambda A + \lambda x = \lambda B - x$$

ou seja, $x = \frac{\lambda}{(1+\lambda)}(B-A) = -\frac{\lambda}{(1+\lambda)}(A-B) = -27.552,15$. As soluções negativas devem ser interpretadas como no caso sem CPMF. No caso análogo, envolvendo três sócios, uma simples inversão de flechas e troca de sinal não resolve o problema (vide §3 e §4).

$$\mathsf{A} \xrightarrow{x} \mathsf{B}$$

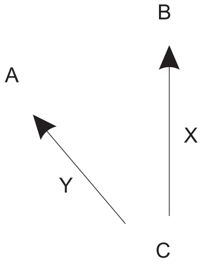
Se a taxa da CPMF fosse de 0,1%, o valor de λ seria $1,001$. O caso sem CPMF corresponde a $\lambda = 1$.

§3. Acerto de contas entre três sócios, sem CPMF.

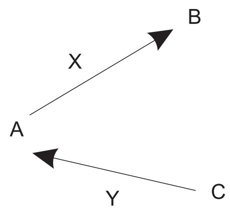
Vamos considerar o caso geral em que o sócio que investiu mais, que chamaremos de A, gastou A, o sócio que investiu menos, que chamaremos de C, gastou C e o terceiro sócio, que chamaremos de B, gastou B.

O esquema de acerto de contas que consideramos na Introdução (em que C envia uma quantia y para A e uma quantia x para B) pode ser representado pelo diagrama Esquema I acima:

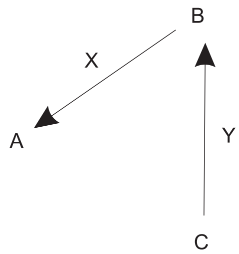
O uso destes diagramas facilita a consideração dos diferentes esquemas de acerto de contas. Por outro lado, a determinação em cada caso dos valores a serem transferidos fica mais transparente quando a questão é colocado em termos algébricos.



Esquema I



Esquema II



Esquema III

No Esquema I, após as transferências, A terá gasto $A-y$, B terá gasto $B-x$ e C gasto $C+x+y$. Como, no final das contas, A, B e C devem participar com quantias iguais, os valores procurados para x e y devem satisfazer o seguinte sistema de duas equações lineares a duas incógnitas:

$$\begin{aligned} A-y &= B-x \\ A-y &= C+x+y \end{aligned}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} x-y &= B-A \\ x+2y &= A-C \end{aligned}$$

A fim de facilitar o estudo comparativo dos diferentes esquemas de acerto de contas, as soluções serão sempre dadas em termos de $A-B$ e $B-C$. Neste caso, a solução do sistema é dada por:

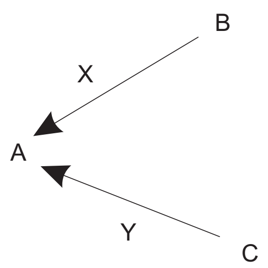
$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}\left[-(A-B)+(B-C)\right] \\ y &= \frac{1}{3}\left[2(A-B)+(B-C)\right]. \end{aligned}$$

No caso em que $A = 50$ mil, $B = 40$ mil e $C = 15$ mil obtemos o resultado da Introdução: C deve enviar R\$ 15 mil para A e R\$ 5 mil para B. Neste mesmo caso, com o Esquema II, C deve enviar R\$ 20 mil para A e A R\$ 5 mil para B e, com o esquema III, C deve enviar R\$ 20 mil para B e B deve enviar R\$ 15 mil para A. Note-se que, nos esquemas I, II e III, os valores de x e de y que resolvem o problema são positivos. Isto ocorre nos casos em que $\frac{A+B+C}{3} \leq B$ (no caso em questão, $\frac{A+B+C}{3} = 35$ mil e $B = 40$ mil).

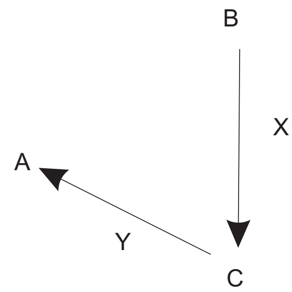
Formalmente, existem outros nove esquemas de acerto de contas. Se, no Esquema I, invertermos a flecha que vai de C para B obtemos um novo esquema com solução $x =$ -5.000 e $y =$ 15.000. O valor negativo para x mostra que ao invés de B enviar recursos para C, C é que deve enviar recursos para B. Invertendo a flecha que vai de C para A obtemos outro esquema com solução $x =$ 5.000 e $y =$ - 15.000. Enfim, para o esquema obtido invertendo as duas flechas do Esquema I, obtemos um esquema cuja solução é $x =$ - 5.000 e $y =$ -15.000. Repetindo este argumento com os Esquemas II e III obtemos um total de doze esquemas.

Se $\frac{A+B+C}{3} \geq B$, os esquemas que dão valores positivos tanto para x quanto para y são o Esquema III e os Esquemas IV e V abaixo. Este é o caso, por exemplo, quando $A =$ R\$ 70 mil, $B =$ R\$ 20 mil e $C =$ R\$ 15 mil pois, $\frac{A+B+C}{3} = 35.000$ e $B = 20.000$.

Resumindo, sem a CPMF, o problema pode ser resolvido usando qualquer um dos doze esquemas que acabamos de descrever - basta interpretar as soluções negativas, que por ventura apareçam, da maneira explicada acima. No caso em questão, em todos os esquemas, no final das



Esquema IV



Esquema V

contas, cada um dos sócios terá participado com exatamente R\$ 35 mil.

§4. Acerto de contas entre três sócios, com CPMF

Existindo o imposto sobre o cheque, a situação é radicalmente diferente. Como exemplo, vamos considerar o caso dos três sócios da Introdução. Como antes, para simplificar a notação, vamos indicar 1,0038 por λ.

Em primeiro lugar, A despendeu, de fato, λA= R\$50.190,00 (R\$50 mil no pagamento de materiais e serviços e R\$190,00 em CPMF). Analogamente, B e C despenderam $\lambda B = R\$40.152,00$ e $\lambda C = R\$15.057,00,$ respectivamente.

Se tentarmos resolver o problema da maneira natural, como no caso sem CPMF, chegamos a um impasse. De fato, os sócios gastaram, em conjunto, $50.190 + 40.152 + 15.057 = 105.399$ e um terço deste total é 35.133. Assim C ficou devendo 15.057 para A e 5.019 para B. Quando C enviar estas quantias, A e B terão gastos 35.133 cada um mas, além do gasto inicial de 15.057, C terá gasto 20.076 em remessas (=15.057 + 5.019) e 76,88 em CPMF (0,38% de 20.076), isto é, um total de 35.209,88. Em resumo, não houve acerto de contas. O processo terá que ser levado adiante com A e B enviando recursos para C. Novamente não haverá acerto de contas, e assim por diante.

É claro que, gradualmente, as diferenças vão se tornando insignificantes mas, este não é o ponto: nosso problema é encontrar, matematicamente, o ajuste de contas perfeito.

Vamos tentar resolver o problema utilizando o Esquema V. Supondo x e y positivos, a despesa de A é dada por $\lambda A - y$, a de B por $\lambda B + \lambda x$ e a de C por $\lambda C - x + \lambda y$. É importante enfatizar que estas fórmulas são válidas somente no caso em que x e y são positivos. Se, pelo menos um deles for negativo, as fórmulas que dão as despesas de A, B e C são outras.

Como os gastos dos sócios devem ser iguais, x e y devem satisfazer o seguinte sistema de duas equações lineares a duas incógnitas:

$$\begin{aligned} \lambda A - y &= \lambda B + \lambda x \\ \lambda A - y &= \lambda C - x + \lambda y \end{aligned}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} \lambda x + y &= \lambda(A - B) \\ -x + (1 + \lambda)y &= \lambda(A - C) \end{aligned}$$

cuja solução é dada por:

$$
\begin{aligned}
x_V &= \frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}[\lambda(A-B)-(B-C)] \\
y_V &= \frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}[(1+\lambda)(A-B)+\lambda(B-C)] \qquad (V)
\end{aligned}
$$

No caso particular em que $A = 50$ mil, $B = 40$ mil, $C = 15$ mil e $\lambda = 1{,}0038$ obtemos $x_V =$ -4.987,31 e $y_V = 15.044{,}26$. O fato de termos encontrado um valor negativo para x_V mostra que o problema não pode ser resolvido utilizando este esquema de acerto de contas.

Se no Esquema V, invertermos a flecha que vai de B para C, obtemos o Esquema I. O sistema de equações correspondente ao Esquema I é

$$
\begin{aligned}
x - y &= \lambda(B-A) \\
\lambda x + (1+\lambda)y &= \lambda(A-C)
\end{aligned}
$$

cuja solução geral é dada por:

$$
\begin{aligned}
x_I &= \frac{\lambda}{1+2\lambda}[-\lambda(A-B)+(B-C)] \\
y_I &= \frac{\lambda}{1+2\lambda}[(1+\lambda)(A-B)+(B-C)] \qquad (I)
\end{aligned}
$$

Quando $\lambda = 1$, isto é, sem CPMF, temos $x_I = -x_V$ e $y_I = y_V$. Este fato, ressalta uma diferença importante entre acertar contas sem CPMF e acertar contas com CPMF. Sem CPMF, a solução correspondente ao Esquema I difere daquela correspondente ao Esquema V por apenas uma troca de sinal. Já, quando $\lambda \neq 1$, as fórmulas para x_V e y_V são bem distintas daquelas para x_I e y_I. Esta dificuldade não existiu no caso de apenas dois sócios (vide §2).

No caso particular em que $A = 50$ mil, $B = 40$ mil, $C = 15$ mil e $\lambda = 1{,}0038$ obtemos $x_I = 4.993{,}63$ e $y_I = 15.031{,}63$. Agora, x_I e y_I são positivos e o acerto de contas está feito pois, com estas remessas, no final das contas, cada sócio gastou:

A - 50.190,00 - 15.031,63 = 35.158,37

B - 40.152,00 - 4.993,63 = 35.158,37

C - 15.057,00 + 1,0038 × 15.031,63 + 1,0038 × 4.993,63 = 35.158,36

O Esquema III também pode ser usado para acertar as contas. Neste caso, o sistema de equações é:

$$
\begin{aligned}
(1+\lambda)x - y &= \lambda(A-B) \\
x + \lambda y &= \lambda(A-C)
\end{aligned}
$$

cuja solução é dada por:

$$
\begin{aligned}
x_{III} &= \frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}[(1+\lambda)(A-B)+(B-C)] \\
y_{III} &= \frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}[\lambda(A-B)+(1+\lambda)(B-C)] \qquad (III)
\end{aligned}
$$

No caso particular em que $A = 50$ mil, $B = 40$ mil, $C = 15$ mil e $\lambda = 1{,}0038$ obtemos $x_{III} = 15.012{,}59$ e $y_{III} = 20.044{,}24$. Novamente, x_{III} e y_{III} são ambos positivos e o acerto de contas está feito. De fato, com estas remessas, a despesa de cada um dos sócios fica sendo de R$ 35.177,41.

O Teorema 1 conta, em cada um dos casos possíveis, com quais esquemas pode-se fazer o acerto de contas.

Teorema 1. Havendo CPMF existem três, e apenas três, esquemas que acertam as contas. Se $\frac{B-C}{A-B} \geq \lambda$, os esquemas são I, II e III. Se $\frac{B-C}{A-B} \leq \lambda$, os esquemas são III, IV e V.

Demonstração. A demonstração será feita resolvendo, para cada um dos doze acertos de contas possíveis, o sistema de duas equações lineares a duas incógnitas correspondente. Isso já foi feito no caso dos Esquemas I, III e V (vide equações (I), (III) e (V)).

O sistema de equações correspondente ao Esquema II é

$$\begin{aligned}(1+\lambda)x - y &= \lambda(B-A)\\ \lambda x - (1+\lambda)y &= \lambda(C-A)\end{aligned}$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{aligned}x_{II} &= \frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}[-\lambda(A-B)+(B-C)]\\ y_{II} &= \frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}[(A-B)+(1+\lambda)(B-C)] \qquad (II)\end{aligned}$$

O sistema de equações correspondente ao Esquema IV é:

$$\begin{aligned}(1+\lambda)x + y &= \lambda(A-B)\\ x + (1+\lambda)y &= \lambda(A-C)\end{aligned}$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{aligned}x_{IV} &= \frac{1}{2+\lambda}[\lambda(A-B)-(B-C)]\\ y_{IV} &= \frac{1}{2+\lambda}[\lambda(A-B)+(1+\lambda)(B-C)] \qquad (IV)\end{aligned}$$

A solução do sistema correspondente ao Esquema III mostra que, como $A-B \geq 0, B-C \geq 0$ e $\lambda \geq 0$, quaisquer que sejam os valores de $A \geq B \geq C, x$ e y serão sempre positivos.

As equações (I), (II), (IV) e (V) mostram os seguintes fatos:
1) nos Esquemas I e II, y é sempre positivo e x é positivo se e somente se $\frac{B-C}{A-B} \geq \lambda$;
2) nos Esquemas IV e V, y é sempre positivo e x é positivo se e somente se $\frac{B-C}{A-B} \leq \lambda$.

Para concluir a demonstração basta verificar que, nos demais sete esquemas, quaisquer que sejam os valores de $A \geq B \geq C$, ou x ou y, ou ambos (no esquema obtido invertendo as duas flechas do sistema III) são negativos.

Corolário. Quando não há CPMF, se $\frac{A+B+C}{3} \leq B, x$ e y são positivos nos Esquemas I, II e III e, se $\frac{A+B+C}{3} \geq B, x$ e y são positivos nos esquemas III, IV e V.

Demonstração. O caso sem CPMF corresponde a $\lambda = 1$. Por outro lado, $\frac{B-C}{A-B} \geq 1$ se e somente se $B \geq \frac{A+B+C}{3}$ e $\frac{B-C}{A-B} \leq 1$ se e somente se $B \leq \frac{A+B+C}{3}$.

Se o interesse das pessoas envolvidas for apenas de acertar contas, o Esquema III é o indicado pois ele funciona em todos os casos (não é necessário saber o valor de $\frac{B-C}{A-B}$). Entretanto, havendo interesse em acertar as contas e gastar o mínimo possível com CPMF, é preciso tomar cuidado pois, em contraste com o que ocorre sem CPMF, a despesa final varia de um esquema para outro. No caso dos três sócios, após o ajuste de contas, usando o Esquema III cada um deles gasta R$35.177,41. Usando o Esquema I, cada um deles gasta R$35.158,37 e, usando o Esquema II, R$35.164,69.

É natural que o Esquema III seja sempre o menos econômico visto que, no processo, parte dos recursos que C envia para B são depois enviados para A e, portanto pagam CPMF duas vezes (situação análoga ocorre com o Esquema II mas, o montante de recursos que paga CPMF duas vezes é menor). Por outro lado, no Esquema I, os recursos que são transferidos pagam CPMF apenas uma vez.

Teorema 2. O Esquema III é sempre o menos econômico. Se $\frac{B-C}{A-B} \geq \lambda$, o esquema mais econômico é I. Se $\frac{B-C}{A-B} \leq \lambda$, o esquema mais econômico é IV.

Demonstração. Vamos, em primeiro lugar, considerar o caso em que $\frac{B-C}{A-B} \geq \lambda$. Os esquemas que acertam as contas são I, II e III.

No Esquema I, na etapa do acerto de contas, a despesa com CPMF é dada por

$$D_I = (\lambda - 1)(x_I + y_I)$$

e fórmulas análogas dão as despesas correspondentes nos outros esquemas. Resulta que:

$$\begin{aligned} D_I &= \frac{\lambda(\lambda-1)}{1+2\lambda}(A+B-2C) \\ D_{II} &= \frac{\lambda(\lambda-1)}{1+\lambda+\lambda^2}[(1-\lambda)A+(1+2\lambda)B-(2+\lambda)C] \\ D_{III} &= \frac{\lambda(\lambda-1)}{1+\lambda+\lambda^2}[(1+2\lambda)A+(1-\lambda)B-(2+\lambda)C] \end{aligned}$$

Simplificando, obtemos:

$$\begin{aligned} D_{III} - D_{II} &= \frac{3\lambda^2(\lambda-1)}{1+\lambda+\lambda^2}(A-B) \geq 0 \\ D_{II} - D_I &= \frac{3\lambda^2(\lambda-1)}{(1+\lambda+\lambda^2)(1+2\lambda)}[\lambda(B-A)+(B-C)] \end{aligned}$$

Como $\frac{B-C}{A-B} \geq \lambda$, temos $\lambda(B-A)+(B-C) \geq 0$ e, portanto, $D_{II} - D_I \geq 0$. Enfim, como $\frac{B-C}{A-B} \geq \lambda$ temos

$$D_{III} \geq D_{II} \geq D_I\,.$$

Quando $\frac{B-C}{A-B} \leq \lambda$, os esquemas que acertam as contas são III, IV e V. Temos:

$$\begin{aligned} D_{IV} &= \frac{\lambda(\lambda-1)}{2+\lambda}[2(A-B)+(B-C)] \\ D_V &= \frac{\lambda(\lambda-1)}{1+\lambda+\lambda^2}[(1+2\lambda)(A-B)+(\lambda-1)(B-C)] \end{aligned}$$

Simplificando, obtemos:

$$\begin{aligned} D_{III} - D_V &= \frac{3\lambda(\lambda-1)}{1+\lambda+\lambda^2}(B-C) \geq 0 \\ D_V - D_{IV} &= \frac{3\lambda(\lambda-1)}{(1+\lambda+\lambda^2)(2+\lambda)}[\lambda(A-B)+(C-B)] \end{aligned}$$

Como $\frac{B-C}{A-B} \leq \lambda$, temos $\lambda(A-B)+(C-B) \geq 0$ e, portanto, $D_V - D_{IV} \geq 0$. Enfim, quando $\frac{B-C}{A-B} \leq \lambda$, temos:

$$D_{III} \geq D_V \geq D_{IV}$$

e isto completa a demonstração do Teorema.

§5. Conclusão

Sem CPMF, os sócios estão livres para acertar as contas de todas as maneiras imagináveis possíveis e sempre acabarão gastando, cada um deles, exatamente $\frac{A+B+C}{3}$.

Com CPMF, a aritmética é mais complicada, existe um esquema que é mais econômico que os outros, esquema este que depende dos valores de A, B, C e λ.

As demonstrações dadas acima valem quaisquer que sejam os valores de $A \geq B \geq C$ e o valor de $\lambda \geq 1$.

É interessante observar, por exemplo, que quando $A = 25.000$, $B = 20.000$ e $C = 14.990$ temos $\frac{B-C}{A-B} = 1{,}002$. Neste caso,

$$1,001 < \frac{B-C}{A-B} < 1,0038$$

e, portanto, com CPMF de 0,1% o esquema mais econômico é o I e com CPMF de 0,38%, o esquema mais econômico é o IV.

Fica o desafio de acertar contas, com CPMF, no caso de quatro sócios A, B, C e D que gastaram $A \geq B \geq C \geq D$, respectivamente. Adotando o caso de três sócios como modelo, é natural inferir que os esquemas mais econômicos devem ser os seguintes:

1) D envia recursos para A, B e C;

2) A recebe recursos de B, C e D;

3) C e D enviam recursos para A e B;

Como decidir, em função de A, B, C, D e λ, qual dos três esquemas deve ser usado em cada caso? Possivelmente, analogamente ao caso de três sócios, devem existir três sistemas de duas inequações nas incógnitas A, B, C, D e λ e somente um desses sistemas será satisfeito no caso particular em questão.

O esquema em que D envia recursos para C, C envia recursos para B e B envia recursos para A deve ser o menos econômico e acertará as contas quaisquer que sejam os valores de $A \geq B \geq C \geq D$ e de $\lambda \geq 1$.

Entretanto, para se ter certeza, é preciso fazer as contas.

Como proceder no caso de n sócios?